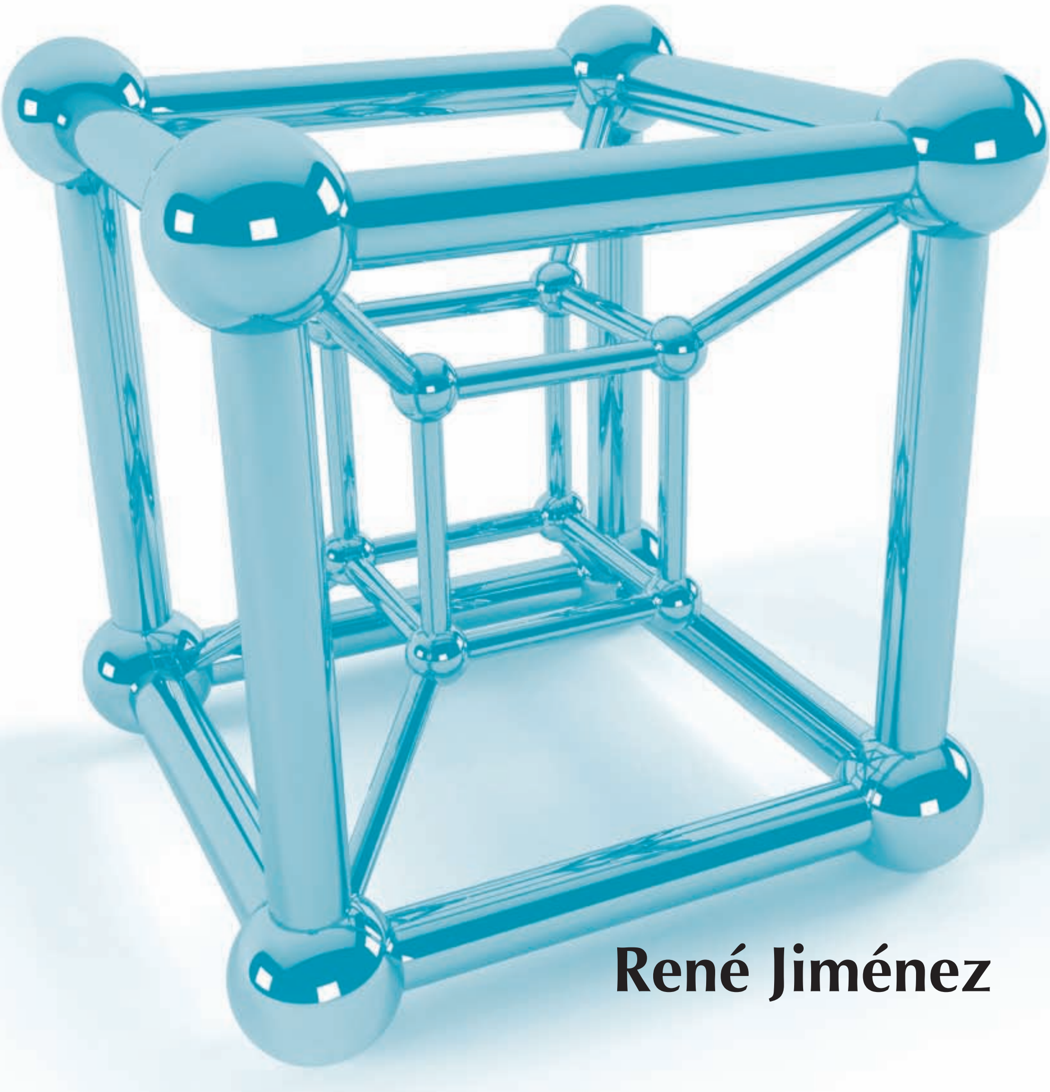
Segunda edición

Matemáticas IV

Funciones

Enfoque por competencias



PEARSON

René Jiménez

Matemáticas IV
Funciones
Segunda edición

René Jiménez
Colegio de Bachilleres

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

Jiménez, René

Matemáticas IV. Funciones
Segunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2011

ISBN: 978-607-32-0551-1

Área: Matemáticas

Formato: 19 × 23.5 cm Páginas: 232

Editor: Enrique Quintanar Duarte
e-mail: enrique.quintanar@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Claudia Celia Martínez Amigón
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán

SEGUNDA EDICIÓN, 2011

ISBN VERSION IMPRESA: 978-607-32-0551-1
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-0552-8
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0553-5

Impreso en México. *Printed in Mexico*.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 13 12 11 10

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.net

Contenido

Agradecimiento

A la ingeniera Silvia Rascón Corral,
por su valiosa colaboración
en la revisión de esta obra.

Presentación

Los temas de este libro están diseñados para cumplir el programa de estudio de un curso de **relaciones funcionales** —Matemáticas IV— para bachillerato. La estructura del contenido cumple los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) cuya finalidad es que el estudiante de este nivel adquiera una educación de calidad que le permita alcanzar las **unidades de competencia** necesarias a través de *saberes específicos* (conocimientos, habilidades y actitudes) que le faciliten la tarea de vincular lo aprendido en la escuela y su entorno pero, además, que tenga argumentos sólidos para estudiar cursos posteriores de matemáticas —como cálculo—, o bien, relacionarlos con las otras áreas del conocimiento.

El texto se ha desarrollado con un enfoque constructivista centrado en el aprendizaje, de tal forma que sea un buen apoyo didáctico para que las maestras y maestros tengan los elementos necesarios que les ayuden a corroborar los *indicadores de desempeño* y las *evidencias de aprendizaje significativo* en su proceso de planeación, ejecución y evaluación de clase.

La presentación de los temas está organizada como sigue:

El bloque 1 destaca las características matemáticas que definen las relaciones entre dos cantidades variables, haciendo énfasis especial en las de carácter funcional.

El bloque 2 define y describe los tipos de funciones matemáticas, y las operaciones y transformaciones algebraicas y geométricas entre ellas.

En los bloques 3, 4 y 5 se estudian las funciones polinomiales hasta de grado 4, profundizando en el análisis de los modelos lineales y cuadráticos. Se desarrollan procedimientos numéricos, algebraicos y geométricos para obtener los ceros de los polinomios.

En el bloque 6 se estudia el comportamiento de las funciones racionales y la existencia de asíntotas en éstas.

En los bloques 7 y 8 se abordan las funciones exponencial y logarítmica, y las funciones periódicas seno y coseno.

Deseo con sinceridad que esta obra sea útil para convencer a los estudiantes de la importancia que tienen las **competencias** en su desarrollo personal y académico; de no ser así, la Reforma Integral, propuesta por las instituciones educativas, y el esfuerzo pedagógico de las maestras y maestros —quienes en su quehacer cotidiano tienen la gran responsabilidad de implantar las competencias en el aula— resultaría estéril.

Agradezco profundamente la confianza y la oportunidad de compartir este esfuerzo, deseando el mayor de los éxitos para todos los involucrados en la noble y honrosa misión que es la educación.

René Jiménez

Competencias

Las **competencias** son la integración de habilidades, conocimientos y actitudes que adquieren las personas con el propósito de resolver exitosamente las situaciones que se les presenten en un contexto determinado.

Competencias genéricas

Las competencias genéricas del bachiller se refieren a la capacidad de respuesta que éste tiene y que le permiten comprender e influir en su entorno (local, regional, nacional e internacional), contar con herramientas básicas para continuar aprendiendo a lo largo de la vida, y convivir adecuadamente en los diferentes ámbitos.

El propósito fundamental de Matemáticas IV es desarrollar en los estudiantes las siguientes competencias genéricas:

- Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
- Elige y practica estilos de vida saludables.
- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

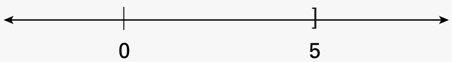
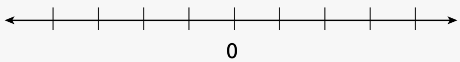
Competencias disciplinares

Se refieren al desarrollo académico del estudiante que le permite participar de forma activa en la sociedad del conocimiento, y continuar así sus estudios superiores, tal como se enuncian a continuación:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural, para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

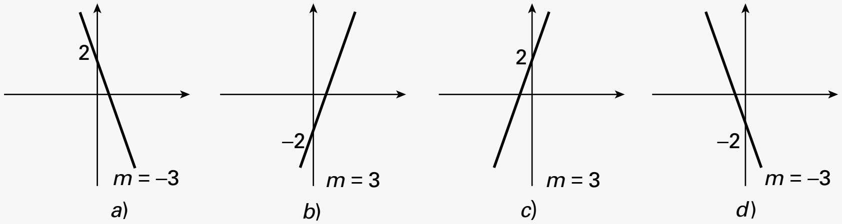
Evaluación diagnóstica

Encuentra la solución para cada una de las siguientes propuestas y anótala en la columna de la derecha.

Propuesta	Solución
1. Escribe si es verdadera o falsa la propiedad de la siguiente igualdad: $(x+y)(a+b)=x(a+b)+y(a+b)$	
2. Escribe la siguiente expresión sin paréntesis: $-\frac{3}{2}(2x-4y)$	
3. Efectúa la siguiente operación: $x=\frac{3-\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}}$	
4. Di si la siguiente desigualdad es verdadera o falsa: $-\pi < x < -1$	
5. Efectúa la siguiente operación: $d=\sqrt{(-1-3)^2+(-2+4)^2}$	
6. Escribe en términos de desigualdad algebraica la siguiente expresión: x es menor que -1 y mayor que -4.	
7. Escribe en términos de desigualdad algebraica el siguiente intervalo $(-\infty, 5]$. Observa la gráfica. 	
8. Expresa la desigualdad con escritura de intervalos y realiza la gráfica correspondiente en la recta numérica: $-3 < x \leq 2$. 	
9. Evalúa la siguiente operación: $\left\lvert \lvert -3 \rvert - \lvert -12 \rvert \right\rvert$	
10. Escribe la solución de la ecuación: $3-2x=0$.	
11. Escribe la solución de la ecuación: $x^2-2x-3=0$.	
12. Escribe la pendiente y la ordenada en el origen de la recta: $y=2-3x$.	

(*Continúa*)

(*Continuación*)

13. La gráfica que corresponde a la ecuación $y = 2 - 3x$ es:  	
14. La población de una ciudad en el año 2000 era de 30,000 personas, si crece 550 personas por año, escribe un modelo algebraico para calcular la población en cualquier año posterior al 2000.	
15. Selecciona y escribe la ecuación que representa una parábola: *a*) $y = \sqrt{9 + x^2}$ *b*) $y = \sqrt{9 - x^2}$ *c*) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ *d*) $y = \sqrt{9 + x}$	
16. Selecciona y escribe la ecuación que representa una circunferencia: *a*) $y = \sqrt{9 + x^2}$ *b*) $y = \sqrt{9 - x^2}$ *c*) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ *d*) $y = \sqrt{9 + x}$	
17. Selecciona y escribe la ecuación que representa una elipse: *a*) $y = \sqrt{9 + x^2}$ *b*) $y = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$ *c*) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ *d*) $y = \sqrt{9 + x}$	
18. Escribe la ecuación de una recta paralela al eje x que está 3 unidades por debajo de éste.	
19. Escribe la ecuación de una recta paralela al eje y que está 3 unidades a la izquierda de éste.	
20. Determina el punto de intersección de las rectas: $4x - y - 3 = 0$ y $2x - y + 1 = 0$	

Matemáticas IV

Funciones

BLOQUE 1

Relaciones y funciones

Una *función* es una regla de dependencia entre dos cantidades variables. Por ejemplo, el desplazamiento de un móvil es una función del tiempo.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos algebraicos y gráficos aplicando relaciones funcionales entre magnitudes, para la representación y resolución de situaciones y/o problemas teóricos o prácticos, concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos funcionales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Interpretar diagramas y textos que contienen símbolos propios de la notación funcional.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Comprender la diferencia entre relaciones y funciones.
  - Enunciar las características de una relación y una función.
  - Identificar el dominio y el rango de una función.
- Representar, combinar y transformar funciones de formas distintas y equivalentes.
- Clasificar las funciones como:
  - Algebraicas y trascendentes.
  - Continuas y discontinuas.
  - Uno a uno, sobre y biyectivas.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Reconocer una relación o una función a partir de su descripción numérica, gráfica o algebraica.
- Obtener el dominio y el rango de una relación o función, en representaciones diversas.
- Obtener la imagen de un elemento del dominio a partir de la regla de correspondencia.
- Determinar los tipos de función con que está trabajando y utilizar sus características específicas.
- Resolver operaciones con funciones.
- Utilizar la noción de función en situaciones cotidianas relacionadas con magnitudes.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Mostrar disposición para involucrarse en actividades relacionadas con la asignatura.
- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerar los de otras personas.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Utilizar los criterios que definen a una función, para establecer si una relación dada es función o no.
- Describir una función empleando diferentes tipos de expresiones, y comprender su dominio y rango.
- Emplear la regla de dependencia de una función y los valores del dominio para obtener el rango correspondiente.

- Aplicar diferentes tipos de funciones en el análisis de situaciones.
- Utilizar operaciones entre funciones para simplificar procesos a través de nuevas relaciones.
- Aplicar las nociones de relación y función para describir situaciones de su entorno.

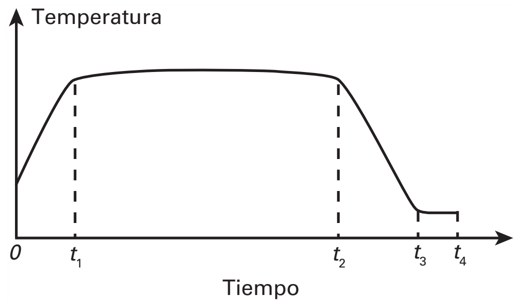
Evidencias de aprendizaje

- Reconoce en un conjunto de parejas ordenadas, datos tabulares, gráficas (prueba de la vertical), ecuaciones y diagramas, que las relaciones funcionales sólo asocian un valor del rango a cada elemento del dominio.
- Identifica a los primeros elementos de un conjunto de parejas ordenadas como el dominio de la relación o función, y a los segundos elementos como rango.
- Realiza cálculos a partir de valores específicos del dominio y el rango asociados mediante una regla de dependencia y expresa sus resultados con notación funcional, tablas, gráficas y diagramas.
- Ilustra la noción de función con ejemplos de situaciones cotidianas en las que están relacionadas dos magnitudes, e identifica el tipo y características de la función correspondiente.

Actividad de aprendizaje significativo

En ciencia siempre que se habla de *modelos matemáticos* de la vida real se refiere a una función o relación que describe la dependencia entre cantidades variables.

Por ejemplo, el modelo de la gráfica que aparece a continuación describe el comportamiento de la temperatura del agua cuando se abre una llave de agua caliente. Escribe lo que la ilustración te dice de acuerdo a los intervalos de tiempo indicados.



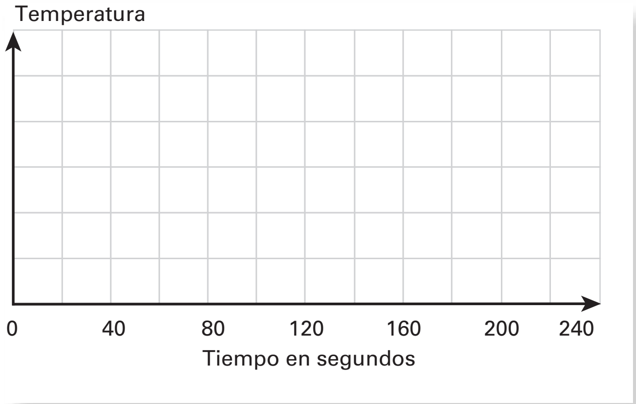
Secuencia didáctica

- Analiza cómo es la temperatura inicial del agua comparada con la del medio ambiente.
- Concluye qué ocurre con la temperatura del agua en cada uno de los intervalos; $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ y $[t_2, t_3]$.
- Comenta con tus compañeros si este modelo gráfico es válido como parte de lo que ocurre en la realidad o si es necesario contar con datos numéricos.

Trabajo colaborativo

Utilicen el sistema coordenado contiguo para trazar la gráfica de la actividad en mención, valiéndose de un termómetro para medir la temperatura del agua a intervalos de 20 segundos y enseguida escriban sus conclusiones.

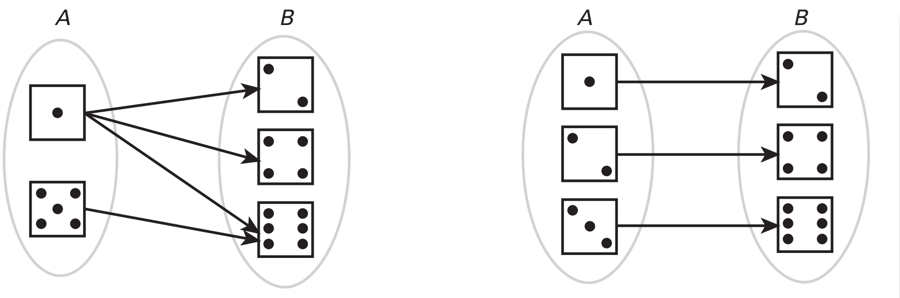
A partir de los datos obtenidos, ¿podría escribirse un modelo matemático que represente el experimento? Coméntalo con tu maestro.



Relaciones

Definición. Se llama *relación* entre dos conjuntos ***A*** y ***B*** a la manera ordenada de asociar o agrupar los elementos de cada uno ellos. Esta asociación puede estar formada por un solo par ordenado, varios o todos los que formen parte del producto entre ***A*** y ***B***.

Por ejemplo, dos posibles casos de relaciones de las 36 formas de ordenar en parejas el experimento de lanzar dos dados son los siguientes:



A es menor que *B*   *A* es la mitad de *B*

Construye tu conocimiento. Reflexiona con tus compañeros, ¿cuál es la diferencia fundamental entre las relaciones del ejemplo anterior?

Recordarás que otra forma de escribir las relaciones anteriores son: {(1,2), (1,4), (1,6), (5,6)} para el evento *menor que* y {(1,2), (2,4), (3,6)} para el evento *la mitad de*.

Autoevaluación

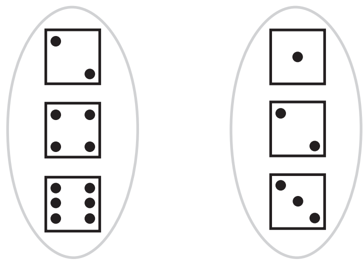
Relaciona con una flecha los elementos del conjunto *A* con los del conjunto *B* y escribe debajo de cada diagrama la relación que guardan.

A	*B*
Italia	América
Francia	Europa
Canadá	África
Japón	Asia

A	*B*
9	8
64	–1
1	+1
36	3
	6

A	*B*
1	10
2	5
3	15

A *B*



Funciones

Las primeras ideas del concepto de función son muy antiguas, sin embargo el desarrollo más formal de su significado y su comprensión se lo debemos al trabajo e investigación de matemáticos relativamente más contemporáneos.

El primero en definir de forma explícita la relación entre cantidades variables y la dependencia entre éstas —el concepto de función— fue *Johann Bernoulli* (1667-1748), la cual enunció como sigue:

> *Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de la manera que sea, por esta variable y por constantes.*

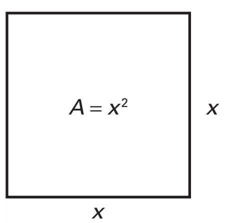
Más adelante *Leonhard Euler* (1707-1783), matemático suizo y discípulo de *Johann Bernoulli*, quien hizo un gran aporte a las matemáticas y en particular al concepto de función, complementó la idea de su maestro ya que su definición se basa en la idea de variación, explicitando muy bien la diferencia entre variables y constantes.

Sin embargo, la definición actual se la debemos a matemáticos que sucedieron a Euler, ya que propusieron un concepto más refinado. Por ejemplo, hacia 1829 el matemático alemán *Peter Dirichlet* entiende la función como una variable dependiente "y", cuyos valores son determinados de una forma definida según los valores que se asignen a la variable independiente x.

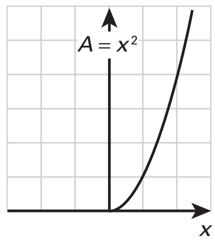
La razón de conocer un poco los antecedentes de la definición de función, es porque los *objetos fundamentales con los que se estudia el cálculo son precisamente las funciones*. Aquí nos prepararemos para analizar las ideas básicas de las funciones, sus gráficas y la manera de transformarlas y combinarlas, atendiendo a la vez el proceso de usarlas como *modelos matemáticos de la realidad*.

Cuando hablamos de la aplicación de las funciones como modelos matemáticos del mundo real, nos estamos refiriendo a la relación de dependencia que existe, por ejemplo, entre **la utilidad de un negocio y el precio de sus productos, el área de un círculo y su radio, la velocidad de un automóvil y la potencia de su motor, el precio de un artículo y su demanda**, etcétera.

Un ejemplo sencillo de estos modelos matemáticos es la regla de dependencia que existe entre el área A de un cuadrado y la longitud de su lado x.



x	x^2
0	0
1	1
2	4



La regla de dependencia del ejemplo anterior se puede escribir en notación funcional de la siguiente manera

$$A(x) = x^2 \qquad \text{o bien} \qquad f(x) = x^2$$

en donde f es la regla *elevar al cuadrado*, x es la **variable independiente**, que define los valores de $f(x)$ que se lee "f de x" la cual se llama también **variable dependiente**.

Definición. Una función es una regla de dependencia entre dos variables, una *independiente* x que define un y sólo un valor de otra que se llama *dependiente* y se escribe $f(x)$.

La relación de dependencia entre las variables se puede representar algebraicamente con la notación

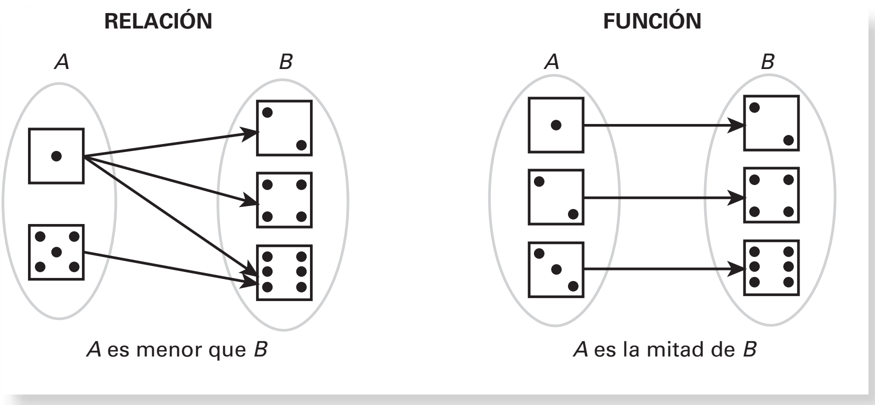
$$y = f(x)$$

Algunos ejemplos de relaciones funcionales los podemos ver en la siguiente tabla:

Regla de dependencia	Notación funcional
Área de un círculo de radio x	$A(x) = \pi x^2$
Raíz cuadrada de un número x	$f(x) = \sqrt{x}$
El ancho $y(x)$ de un rectángulo de área 100 como función de largo x	$y(x) = \dfrac{100}{x}$
La fuerza necesaria F para estirar un resorte una longitud x (k es una constante)	$F(x) = kx$

Diferencia entre relación y función

¡Atención! Las definiciones de relación y función nos llevan a concluir que *todas las funciones son relaciones pero no todas las relaciones son funciones*. Para que no haya confusión en el significado de la definición de función debemos hacer hincapié en que para cada valor de la variable independiente x hay exactamente un y sólo un valor para la variable dependiente $f(x)$; en las relaciones para un valor de la variable independiente puede existir 1, 2 o más valores de la variable dependiente. Analiza los siguientes diagramas vistos con anterioridad.



Ejemplos:

Evaluación de una función. Evaluar una función en un proceso de análisis significa que un mismo símbolo de funcionalidad indica una misma ley de dependencia para el nuevo valor de la variable independiente.

1. Si $f(x) = x^2 + 1$, evaluar la función en $f(2)$, $f(-1)$ y en $f\left(\sqrt{3}\right)$.

Solución:
Sustituyendo los valores de x en la expresión $f(x) = x^2 + 1$ obtenemos los respectivos valores de $f(x)$.

$$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1 = 4$$

2. Si $f(x) = 2 - 3x^2$, encontremos, *a*) $f(x + h)$, *b*) $f(x + h) - f(x)$ y *c*) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Solución:

a) $f(x+h) = 2 - 3(x+h)^2 = 2 - 3(x^2 + 2xh + h^2) = 2 - 3x^2 - 6xh - 3h^2$

b) $f(x+h) - f(x) = \left[2 - 3(x+h)^2\right] - \left[2 - 3x^2\right] = 2 - 3x^2 - 6xh - 3h^2 - 2 + 3x^2 = -6xh - 3h^2$

c) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{-6xh - 3h^2}{h} = \dfrac{h(-6x - 3h)}{h} = -6x - 3h$

3. Evaluemos la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(-4)$.

Solución:

$f(-4) = \sqrt{-4}$ El valor de $\sqrt{-4}$ es inadmisible en el campo de los números reales.

Este ejemplo nos enseña que los valores de la variable independiente x tienen que ser mayores o iguales a cero, es decir $x \geq 0$ y se llama *dominio de la función*.

4. Evaluemos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $f(0)$.

Solución:

$f(0) = \dfrac{1}{0} = \infty$ La división entre cero en matemáticas no está definida.

Este ejemplo nos enseña que los valores del denominador x tienen que ser diferentes a cero, es decir $x \neq 0$.

Dominio y rango de una función

Dominio. Son todos los valores reales que se le pueden asignar a la variable independiente x de una función.

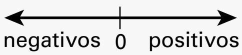
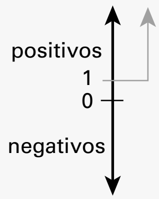
Rango. Es el conjunto de números reales que acepta $f(x)$ conforme x cambia en todo su dominio. También se le llama imagen de x bajo f.

Una forma útil de conocer, tanto los valores del *dominio* como del *rango* de una función, es imaginar una recta numérica y preguntarse si la expresión algebraica de la función acepta, primero el *cero*, luego, cuáles *números positivos* y finalmente cuáles *negativos*.

Ejemplos:

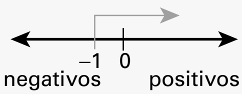
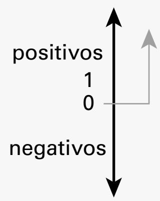
1. Hallar el dominio y el rango de $f(x) = x^2 + 1$.

Solución:

Función	Dominio	Rango	
$f(x) = x^2 + 1$	 Aquí se ve que x puede aceptar cualesquier valor real en la ecuación. $-\infty < x < \infty$	Cuando sustituimos los valores de x en la ecuación, $f(x)$ toma valores de 1 en adelante; por tanto, $f(x) \geq 1$	

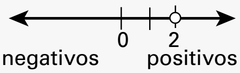
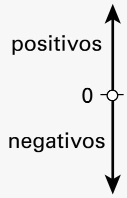
2. Hallar el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x+1}$

Solución:

Función	Dominio	Rango	
$f(x) = \sqrt{x+1}$	 En la ecuación se ve que $x + 1 \geq 0$; por tanto, $x \geq -1$	Cuando sustituimos los valores de x en la ecuación, $f(x)$ toma valores de 0 en adelante; por tanto, $f(x) \geq 0$	

3. Hallar el dominio y el rango de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

Solución:

Función	Dominio	Rango	
$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$	 En la ecuación se ve que el denominador $x - 2 \neq 0$, por tanto, el dominio son todos los números reales excepto el 2. $x \neq 2$	Cuando despejamos x en la ecuación, $f(x)$ toma valores diferentes de cero; por tanto, $f(x) \neq 0$	

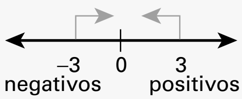
4. Hallar el dominio y el rango del volumen de un cubo como función de su lado x.

Solución:

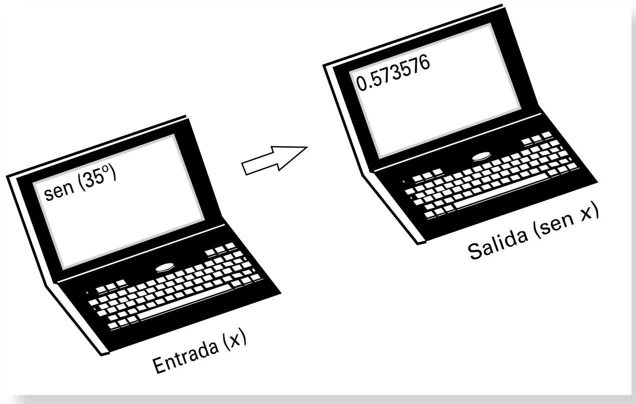
Función	Dominio	Rango
$V(x) = x^3$	Por la naturaleza del ejercicio $x \geq 0$	$V(x) \geq 0$

5. Hallar el dominio y el rango de $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

Solución:

Función	Dominio	Rango	
$f(x)=\sqrt{9-x^2}$	 En la ecuación se ve que $9 - x^2 \geq 0$; por tanto, $-3 \leq x \leq 3$	Sustituyendo los valores de x en la ecuación, $f(x)$ toma valores entre 0 y 3. $0 \leq f(x) \leq 3$	

Con frecuencia se compara el concepto de *función* con una máquina. Si los valores de x están en el dominio de la función, entonces x entra en la máquina y produce una salida $f(x)$. Uno de los mejores ejemplos de esta analogía son las calculadoras. Por ejemplo, si oprimimos la tecla $\sqrt{x}$ nos daremos cuenta inmediatamente que x tiene que ser *mayor o igual a cero*, pues de otra forma no obtenemos respuesta numérica en el campo de los números reales, otro ejemplo sería la función trigonométrica $f(x) = \text{sen } x$.



Evidencias de aprendizaje

1. Completa la tabla dada a continuación, escribiendo la regla de dependencia en forma de expresión algebraica o con tus propias palabras según corresponda.

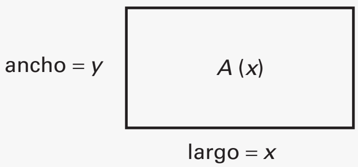
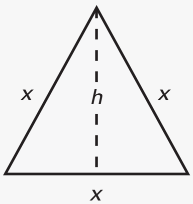
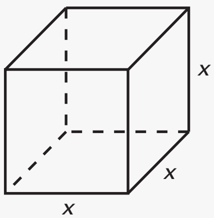
a) Sumar 4 y luego dividir entre 2.	$f(x) = \dfrac{x+4}{2}$
b) Sumar 2 y a continuación extraer raíz cuadrada.	
c)	$f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$
d) Elevar al cuadrado, restar de 9.	
e)	$y = \sqrt{2x-1}$
f) Multiplicar por 2 y restar el cuadrado de la misma cantidad.	
g)	$g(x) = 1 - x^4$
h) Elevar al cuadrado, multiplicar por 2 y sumar 3.	
i)	$h(x) = \dfrac{x}{3} - 5$
j) Multiplicar por 3, restar de 7 y sacar raíz cuarta.	

2. Completa cada una de las tablas dadas a continuación.

Dado $f(x) = 2 - x$, evalúa $f(3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-2)$, $f(x+h)$	
$f(3) = 2 - 3 = -1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) =$
$f(-2) =$	$f(x+h) =$

Dado $f(x) = 2x^2 - 3$, evalúa $f(-2)$, $f(-x)$, $f(1/x)$, $f(x+h)$	
$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$	$f(-x) =$
$f(1/x) =$	$f(x+h) =$

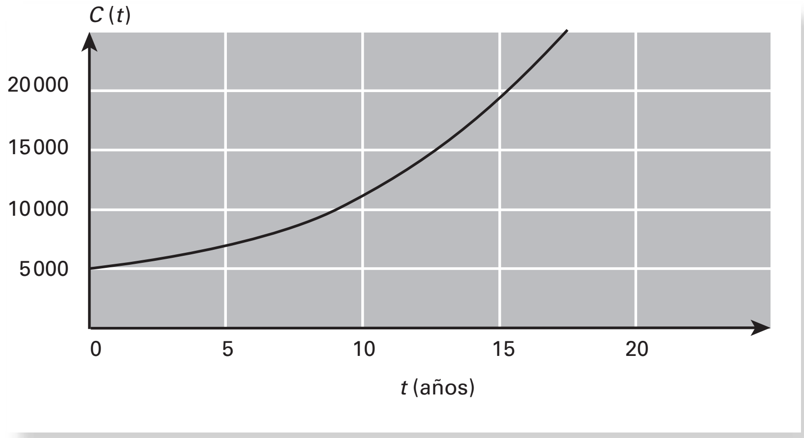
3. Encuentra una fórmula para la función propuesta y escribe su dominio.

a) Un rectángulo tiene un perímetro de 16 cm. Expresa su área $A(x)$ como función de su largo.	$A(x)$	Dominio
		
b) Expresa el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de sus lados. Escribe su dominio.	$A(x)$	Dominio
		
c) Expresa el área de un cubo como función de su volumen.	$A(V)$	Dominio
		

Actividad de aprendizaje significativo

La gráfica que aparece enseguida muestra el comportamiento de un depósito $C(t)$ en una cuenta bancaria que genera intereses después de t años.

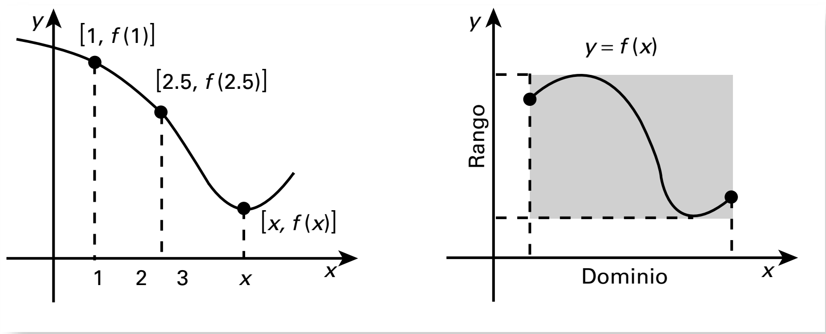
a) ¿Cuál fue la cantidad de dinero que se depositó originalmente?
b) Calcula $C(12)$ y escribe una interpretación de tu cálculo.
c) ¿Cuándo el saldo es $20 000?



Gráfica de una función

La forma más común de describir una función $y = f(x)$ es a través de una gráfica en el plano coordenado. En otras palabras, esto quiere decir que la visualización de $f(x)$ son los puntos (x, y) en el plano coordenado, tales que $y = f(x)$ está en el dominio de f.

La descripción gráfica de una función nos permite tener una imagen más objetiva del dominio y rango de ésta sobre los ejes coordenados.

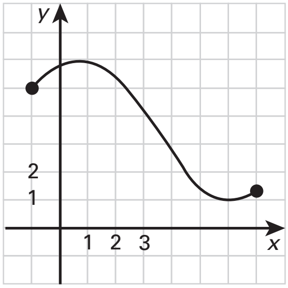


Ejemplos:

1. La gráfica de la figura representa una función $f(x)$. *a*) Encuentra los valores de $f(-1)$ y $f(3)$. *b*) Halla el dominio y el rango de la función.

Solución:

a) En la gráfica se observa que cuando $x = -1$, $y = 5$; por tanto, $f(-1) = 5$, además si $x = 3$, $y \approx 4.2$, entonces $f(3) \approx 4.2$.
b) El dominio está en el intervalo $-1 \leq x \leq 7$ y el rango en $1 \leq y \leq 6$.

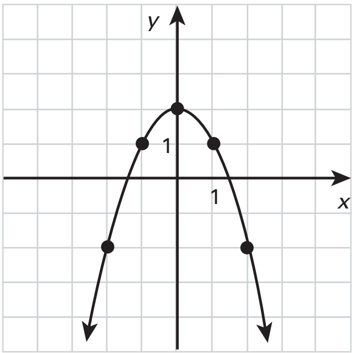


2. Bosqueja la gráfica de $f(x) = 2 - x^2$ y encuentra el dominio y rango.

Solución:
Podemos encontrar la gráfica de la función elaborando una tabla como la de la figura y enseguida unir los puntos resultantes.

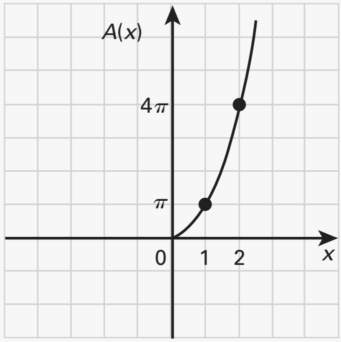
El dominio son todos los números reales: $-\infty < x < \infty$ y el rango es: $y \leq 2$.

x	$2 - x^2$
-2	-2
-1	1
0	2
1	1
2	-2



Formas de representar una función

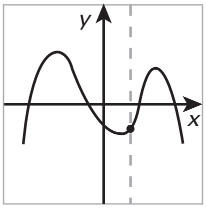
Utilizaremos cuatro maneras posibles de representar una función, pensemos por ejemplo en el área A de un círculo que depende de su radio x. Observa que el dominio es: $x \geq 0$.

<table>
<tr><th>VERBAL
(Es una descripción en palabras)</th><th>ALGEBRAICA
(Con una fórmula explícita)</th></tr>
<tr><td>El área de un círculo</td><td>$A = \pi x^2$</td></tr>
<tr><th>NUMÉRICA
(Es una tabla de valores)</th><th>GRÁFICA
(Es una visualización en el plano)</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th colspan="2">$A(x) = \pi x^2$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\pi(1)^2$</td><td>π</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\pi(2)^2$</td><td>4π</td></tr>
</table>
</td><td>


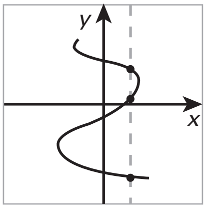
</td></tr>
</table>

Prueba de la recta vertical

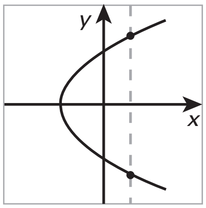
Una gráfica en el plano representa una función siempre y cuando una recta vertical la interseca sólo una vez.



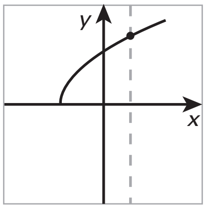
Sí es función



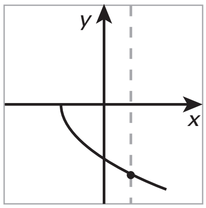
No es función



No es función



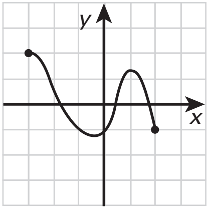
Sí es función

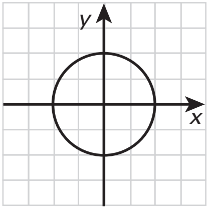


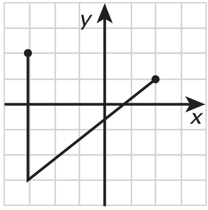
Sí es función

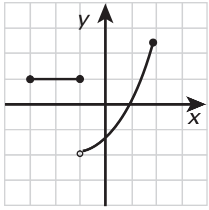
Evidencias de aprendizaje

1. Determina si cada curva es la gráfica de una función de x. Escribe el dominio y el rango de cada curva. La escala de la cuadrícula es 1:1.





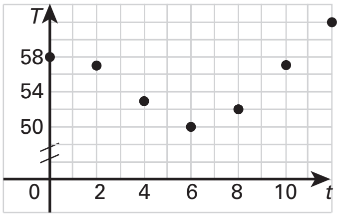




Dominio:

Rango:

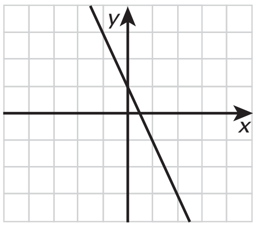
2. La curva de la figura muestra el comportamiento de la temperatura T en cierta ciudad, desde la medianoche hasta el mediodía. El tiempo t se midió cada dos horas a partir de la medianoche. Une los puntos para trazar la gráfica y completa la tabla de temperaturas que aparece a continuación.



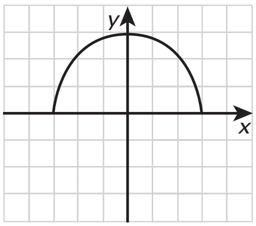
t	0	2	4	6	8	10	12
T							

3. Observa la gráfica y la ecuación de cada una de las siguientes funciones y escribe en el recuadro en blanco su dominio. La escala de la cuadrícula es 1:1.

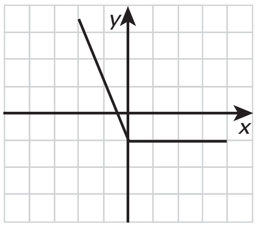
$f(x) = 1 - 2x$



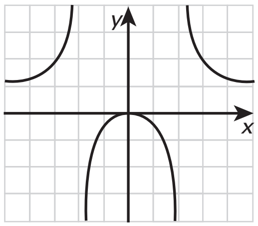
$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$



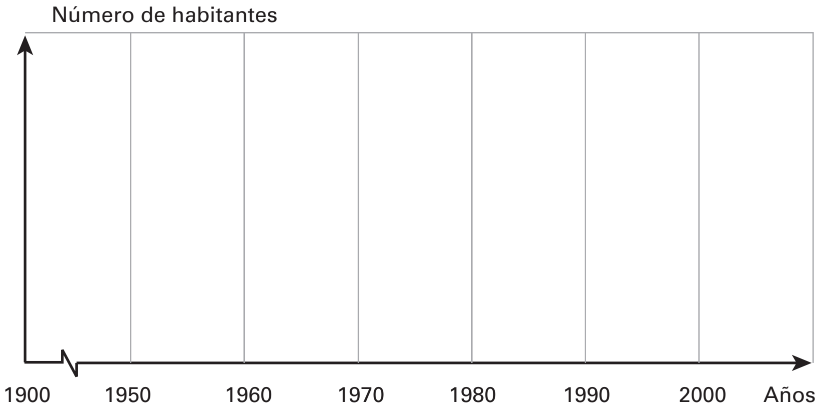
$h(x) = |x| - x - 1$



$k(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$



4. La población de cierta ciudad creció de 1900 a 1950; permaneció más o menos constante en la década de 1950 y disminuyó de 1960 hasta el año 2000. Traza una gráfica aproximada del comportamiento de la población como una función de los años desde 1900.



Funciones definidas por secciones

Estas funciones quedan definidas por expresiones algebraicas diferentes en distintas partes de su dominio.

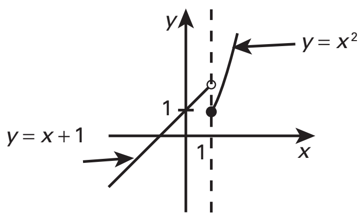
Ejemplos:

1. Si una función $f(x)$ se define por $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$. Encuentra su gráfica.

Solución:
La función está definida por secciones, es decir, para valores de x menores de 1 su fórmula es la recta $x + 1$ y cuando x es mayor o igual a 1 su fórmula es la parábola x^2.

$x < 1$	0.9	0	–1	–2	–3
$f(x) = x + 1$	1.9	1	0	–1	–2

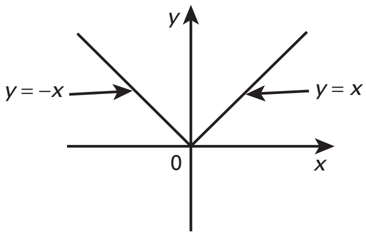
$x \geq 1$	1	2	3	4	5
$f(x) = x^2$	1	4	9	16	25



2. La función **valor absoluto** $f(x)=\left|x\right|$ se define como

$$\left|x\right|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}.$$ Traza su gráfica.

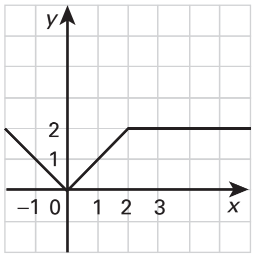
Solución:
La función es la recta $y = x$ para valores mayores o iguales a 0 y $y = -x$ para valores menores de cero.



Evidencias de aprendizaje

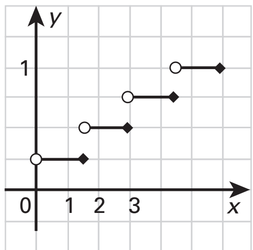
1. Encuentra una expresión algebraica para la función de la gráfica mostrada a continuación. Observa que la función está dividida en 3 secciones.

$$f(x)=\begin{cases} \boxed{} & \text{si } x\leq 0 \\ \boxed{} & \text{si } 0<x\leq 2 \\ \boxed{} & \text{si } x>2 \end{cases}$$



2. **Función escalón.** Una función definida seccionalmente como la de la gráfica siguiente se llama precisamente así, por su forma de escalera. Llámala $C(x)$ y encuentra una tabla de valores que la defina.

$$C(x)=\begin{cases} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases}$$

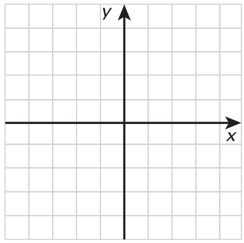


3. Traza la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si} \quad x<-1\\ 3-x & \text{si} \quad x\geq -1\end{cases}.$$

$x < -1$					
$f(x) = 2x + 3$					

$x \geq -1$					
$f(x) = 3 - x$					

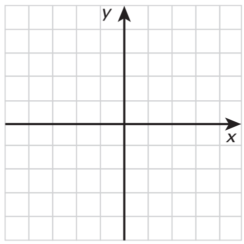


4. Traza la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si} \quad x<-1\\ x^2 & \text{si} \quad x\geq -1\end{cases}.$$

$x < -1$					
$f(x) = x + 2$					

$x \geq -1$					
$f(x) = x^2$					

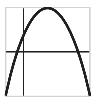


Winplot. Sección especial

El software **Winplot** es un programa que distribuye gratuitamente el profesor Richard Parris, de la Philips Exeter, en New Hampshire, y es una *excelente herramienta tecnológica que sirve para graficar y analizar funciones matemáticas* en un ambiente de Windows. Se puede descargar desde la dirección electrónica:

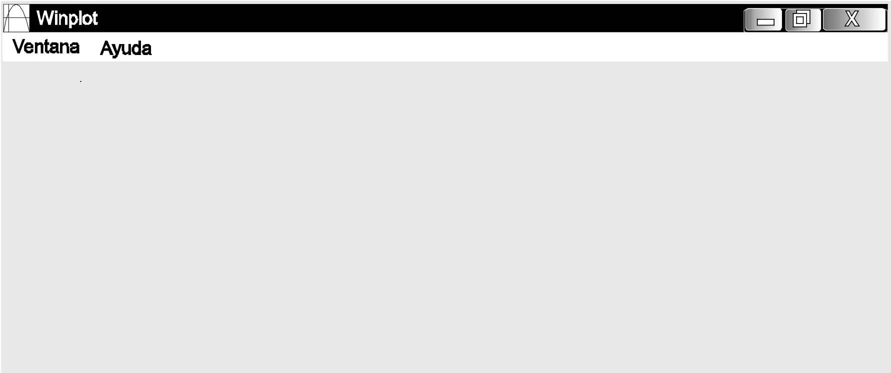
http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Para acceder a este programa te sugerimos un acceso directo en la pantalla de inicio. El icono de **Winplot** es el siguiente:

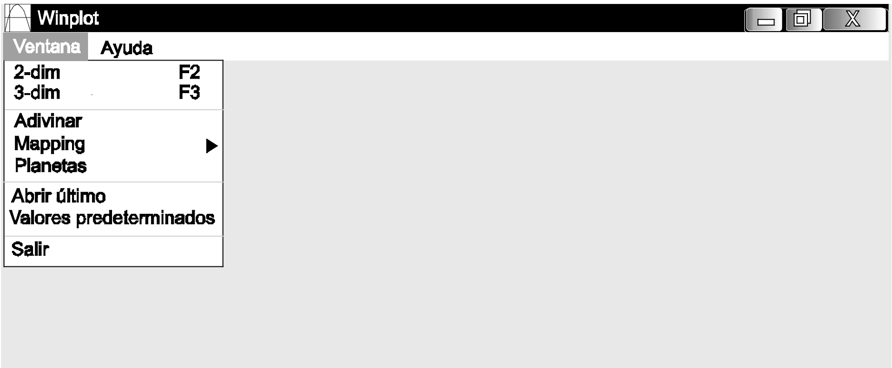


Secuencia didáctica. Los pasos que debes seguir para graficar una función son los que aparecen a continuación.

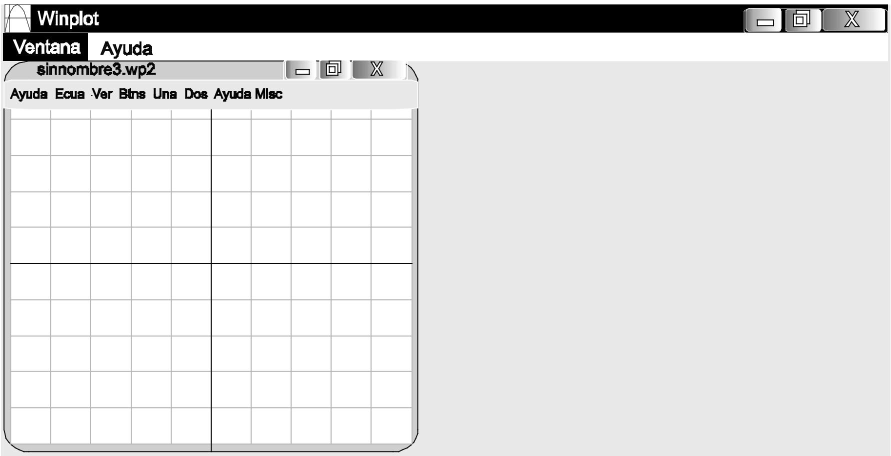
Por ejemplo, obtengamos la gráfica de $f(x) = x^2 - 2$.



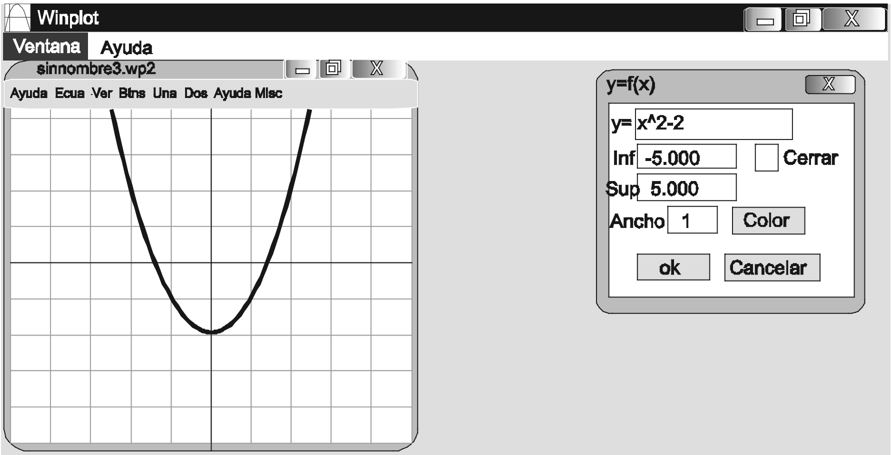
Paso 1. Abrir el programa



Paso 2. Dar un clic en **ventana**



Paso 3. Dar un clic en **2 dim**



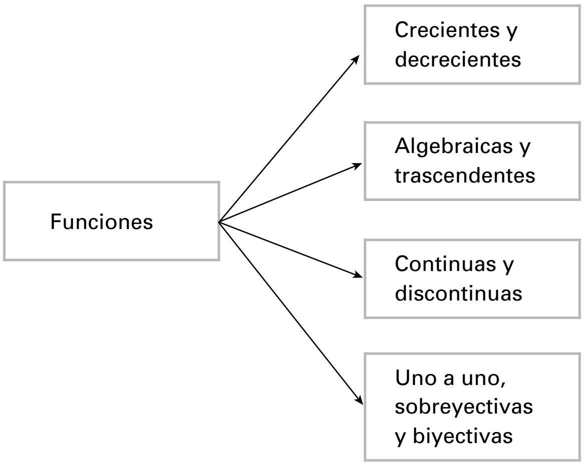
Paso 4. Dar un clic en **ecua**, otro en **explicita** o **y = f(x)**, ingresar la función como **y = x^2** y activar **ok.**

Nota: dependiendo de la versión del programa, para ingresar la función puede ocurrir que la opción diga $y = f(x)$, o bien, diga *explicita*.

Finalmente te sugerimos explorar y practicar la gran capacidad que tiene el software para encontrar soluciones gráficas a diversas situaciones representadas por funciones matemáticas ya que te será de gran utilidad a lo largo del curso.

Clasificación de las funciones

La clasificación de las funciones depende del propósito de cada curso de matemáticas, pero en esta ocasión las dividimos de la siguiente manera:

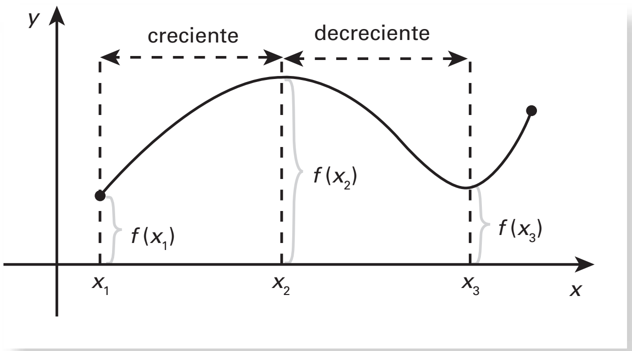


Funciones crecientes. Una función se llama creciente si cuando x crece también lo hace $y = f(x)$, es decir

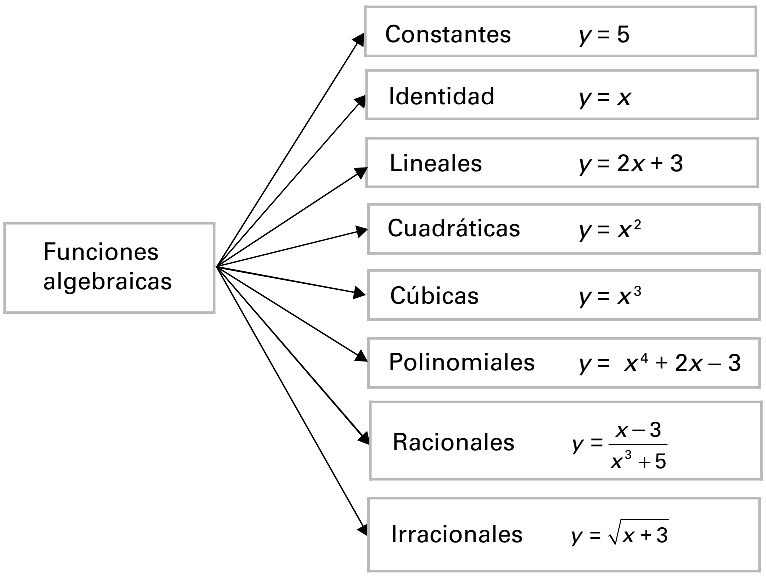
$$\text{Si } x_2 > x_1 \text{ entonces } f(x_2) > f(x_1)$$

Funciones decrecientes. Una función se llama decreciente si cuando x crece entonces $y = f(x)$ disminuye, es decir

$$\text{Si } x_3 > x_2 \text{ entonces } f(x_3) < f(x_2)$$



Funciones algebraicas. Son funciones algebraicas aquellas que resultan de operaciones algebraicas como la adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces a partir de polinomios; a su vez éstas se dividen de la siguiente manera:

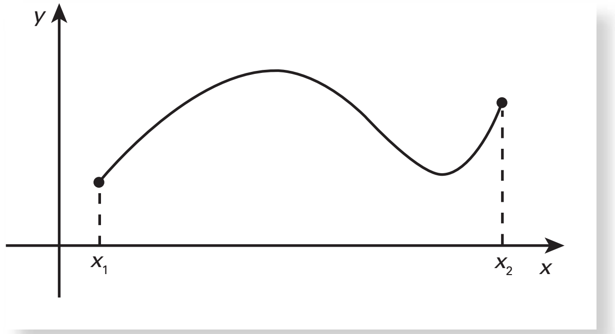


Funciones trascendentes. Las funciones trascendentes son las funciones trigonométricas, las logarítmicas y las exponenciales y se les llama así para distinguirlas de las algebraicas.

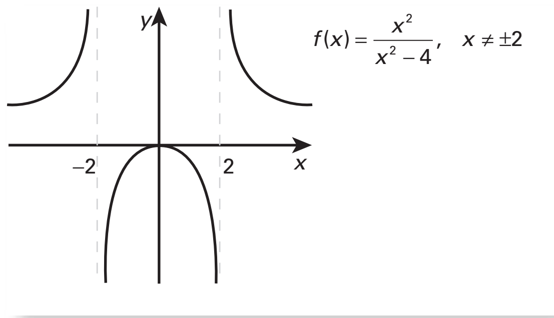
Ejemplos:

$$f(x) = \text{sen } 2x, \qquad g(x) = \log(1-x), \qquad h(x) = e^{3x+1}$$

Funciones continuas. Son funciones que en su dominio no tienen saltos, huecos o interrupciones. Por ejemplo, si trazamos su gráfica con un lápiz, éste no se despega del papel.



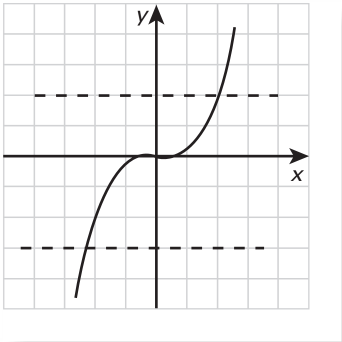
Funciones discontinuas. Estas funciones tienen puntos o intervalos en su dominio que no están definidos. Por ejemplo, la siguiente gráfica de la función no está definida para $x = \pm 2$.



Funciones uno a uno o inyectivas. Una función $f(x)$ es **uno a uno** si no hay dos elementos del dominio x que tengan el mismo rango $f(x)$, es decir

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que} \qquad x_1 \neq x_2$$

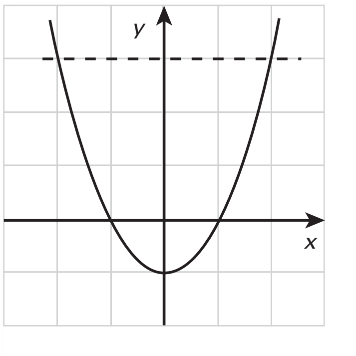
Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es *uno a uno* porque dos valores diferentes para x no pueden tener el mismo valor al cubo. Observa en la gráfica que para dos valores diferentes de x hay dos valores diferentes de y.



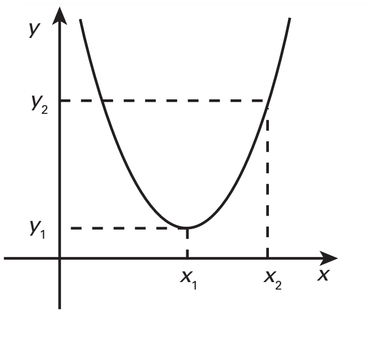
Criterio de la recta horizontal

Un excelente criterio para determinar si una función es **uno a uno** es que ninguna recta horizontal debe de cruzar más de una vez su gráfica.

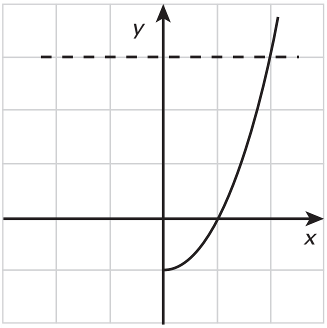
La función $f(x) = x^2 - 1$, no es uno a uno, porque, por ejemplo, $f(-2) = 3 = f(2)$. Observa la gráfica.



Funciones sobreyectivas. Cuando la gráfica de una función, como la mostrada en la figura que aparece a continuación, se corta en más de un punto mediante una recta horizontal, la función se llama *sobreyectiva*.



Funciones biyectivas. Cuando una función no es uno a uno, como $f(x) = x^2 - 1$, es posible restringir su dominio de forma que la función resultante se convierta en inyectiva. Si definimos el dominio de $f(x) = x^2 - 1$ como $x \geq 0$, entonces se llama *función biyectiva* y su gráfica queda de la manera siguiente.

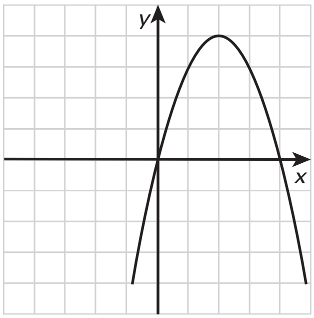


Como puedes ver, la función $f(x) = x^2 - 1$ puede ser sobreyectiva o inyectiva según se restinga el dominio o no.

Evidencias de aprendizaje

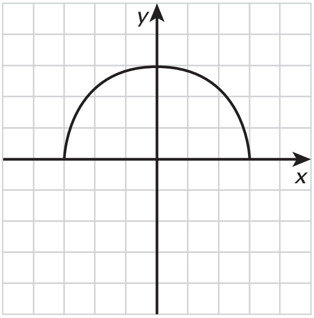
1. Se da la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^2$. *a*) Obtén los valores de $f(0)$, $f(2)$ y $f(4)$, *b*) determina el dominio, *c*) escribe los intervalos donde la función crece y donde decrece.

Valores	Dominio	Intervalos donde crece	Intervalos donde decrece
$f(0) =$ $f(2) =$ $f(4) =$			



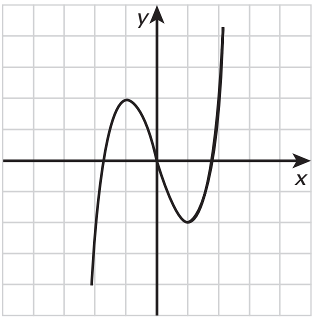
2. Se da la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$. *a*) Obtén los valores de $f(-3)$, $f(0)$ y $f(3)$, *b*) determina el dominio, *c*) escribe los intervalos donde la función crece y donde decrece.

Valores	Dominio	Intervalos donde crece	Intervalos donde decrece
$f(-3)=$ $f(0)=$ $f(3)=$			



3. Se da la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x$. *a*) Obtén los valores de $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$, *b*) determina el dominio, *c*) escribe los intervalos donde la función crece y donde decrece.

Valores	Dominio	Intervalos donde crece	Intervalos donde decrece
$f(-1)=$ $f(0)=$ $f(1)=$			

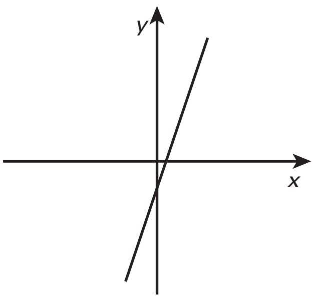


4. Dada la siguiente lista de funciones, clasifica cada una de ellas escribiendo en el espacio correspondiente si se trata de: un polinomio, una raíz, una racional, una trigonométrica, una exponencial o logarítmica.

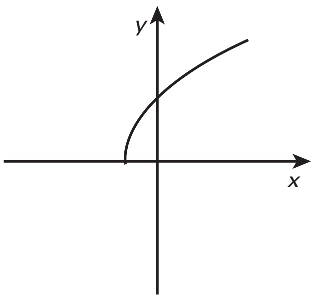
Función	Tipo de función	Función	Tipo de función
a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$		*b*) $g(x)=x^{\frac{2}{3}}$	
c) $h(x)=2x^5-x^3-2$		*d*) $r(x)=\log_{10} x$	
e) $s(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2}$		*f*) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$	
g) $u(x)=\operatorname{sen} 2x$		*h*) $y=10^x$	
i) $y=\operatorname{sen} x+\tan x$		*j*) $y=x+\dfrac{x^2}{x+1}$	

5. Dada la gráfica y la ecuación de cada función, determina si son uno a uno.

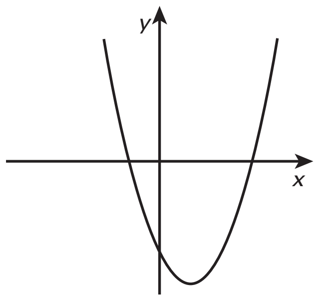
$f(x)=3x-1$



$g(x)=2\sqrt{x+1}$

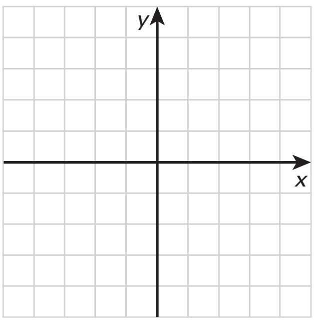


$h(x)=x^2-2x-3$

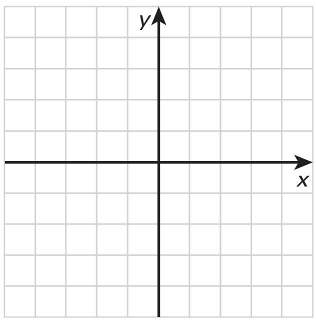


6. Dibuja la gráfica de cada función y concluye si son uno a uno.
Sugerencia: comprueba tus resultados con Winplot.

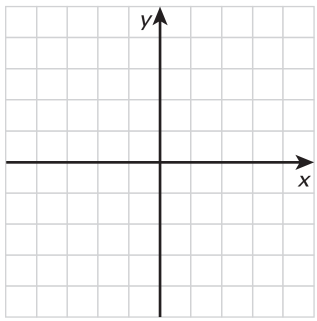
$f(x)=2x-1$



$g(x)=x^2-4$

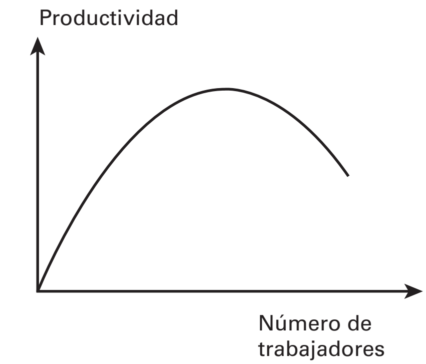


$h(x)=|x|$



Autoevaluación

La gráfica de la figura representa la productividad de una línea de ensamble como una función del número de trabajadores en la línea. Explica su comportamiento histórico.



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 1

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• comprender la diferencia entre relaciones y funciones?	
• representar, combinar y transformar funciones de formas distintas y equivalentes?	
• clasificar las funciones?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• reconocer una relación o una función a partir de su descripción numérica, gráfica o algebraica?	
• obtener el dominio y el rango de una relación o función, en representaciones diversas?	
• obtener la imagen de un elemento del dominio a partir de la regla de correspondencia?	
• determinar los tipos de función con que está trabajando y utilizar sus características específicas?	
• resolver operaciones con funciones?	
• utilizar la noción de función en situaciones cotidianas relacionadas con magnitudes?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.1. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y los **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

BLOQUE 2

Funciones especiales, transformaciones gráficas y operaciones con funciones

Aviones Blue Angels de la Marina de Estados Unidos en un vuelo de exhibición. Su trayectoria es producto de la combinación de varias funciones.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos algebraicos y gráficos aplicando propiedades de funciones inversas, constantes, idénticas, valor absoluto y escalonadas, para la representación y resolución de situaciones y/o problemas teóricos o prácticos, concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos funcionales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Utilizar transformaciones y combinaciones de funciones y sus gráficas para la visualización de las representaciones algebraicas y geométricas de las funciones.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Reconocer las características de las funciones inversas.
- Describir en forma gráfica y algebraica la inversa de una función.
- Reconocer las funciones valor absoluto, constante, idéntica y escalonada.
- Aplicar las transformaciones de las gráficas de las funciones.
- Aplicar las operaciones con funciones.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Obtener la relación inversa de una función y determinar si ésta también es una función.
- Utilizar las funciones valor absoluto, idéntica, constante y escalonadas, para describir relaciones entre algunas variables.
- Construir gráficas y expresiones de funciones, aplicando traslaciones y reflexiones a las gráficas de otras funciones.
- Combinar funciones para obtener nuevas funciones a través de sus operaciones.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Mostrar disposición para involucrarse en actividades relacionadas con la asignatura.
- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerar los de otras personas.
- Reflexionar sobre la ventaja de realizar transformaciones en gráficas para simplificar procesos algebraicos y geométricos.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Representar el conjunto de parejas ordenadas que corresponde a la función inversa de una función dada, representar la ecuación de la relación inversa de una función y determinar si ésta representa también una función.
- Utilizar la gráfica de una función para trazar la gráfica de su función inversa.
- Resolver problemas que involucran funciones inversas, escalonadas, valor absoluto, idéntica y constante.
- Argumentar el uso de traslaciones o reflexiones específicas para la resolución de problemas teóricos o prácticos.

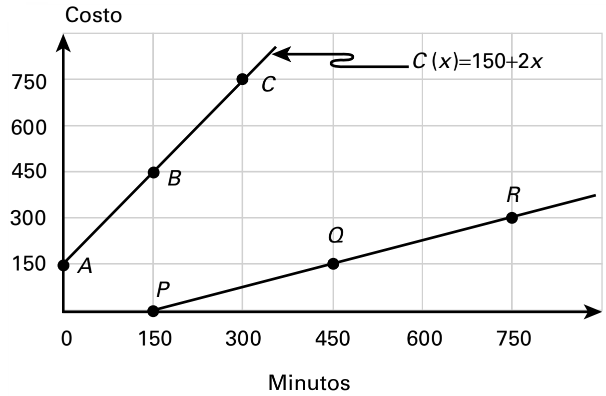
Evidencias de aprendizaje

- Intercambia los elementos de parejas que describen una función, o las variables en la ecuación de una función para obtener la inversa.
- Por medio de demostraciones frente al grupo y de manera individual, traza la gráfica de la función inversa utilizando las gráficas de la función directa y de la función idéntica.
- En un escrito, desarrolla la aplicación de las funciones inversas, y funciones especiales para solucionar o modelar situaciones prácticas como el pago de tarifas de agua, de taxis, etcétera.
- Elige y justifica la traslación o reflexión que aplicó a una gráfica para obtener la regla de correspondencia y la gráfica de otra función que modela una situación teórica o práctica.

Actividad de aprendizaje significativo

La inversa de una función de costo. Una empresa de telefonía celular cobra una tarifa mensual de \$150 más \$2 por minuto. Si se contrata el servicio, entonces por hablar x minutos, el costo está modelado por la función $C(x) = 150 + 2x$. Esto significa que si un usuario habla 75 minutos, su costo es $C(x) = 150 + 2(75) = 300$ pesos; es decir, gráficamente una pareja ordenada; por ejemplo, es (75, 300).

1. En el mismo contexto, ¿qué significa la pareja (300, 75)?
2. Analiza los dos modelos lineales que aparecen enseguida, uno pertenece a la función lineal $C(x) = 150 + 2x$. ¿Cuál es el modelo algebraico de la otra línea y qué representa?



Construye tu conocimiento. Reflexiona y responde lo siguiente:

- La regla de dependencia de la función $C(x) = 150 + 2x$ es multiplicar por 2 y sumar 150. ¿Cuál es la regla de dependencia de la otra función de la gráfica?

- Escribe las coordenadas de los puntos $A($ $\quad$ $)$, $B($ $\quad$ $)$ y $C($ $\quad$ $)$.

- Escribe las coordenadas de los puntos $P($ $\quad$ $)$, $Q($ $\quad$ $)$ y $R($ $\quad$ $)$.

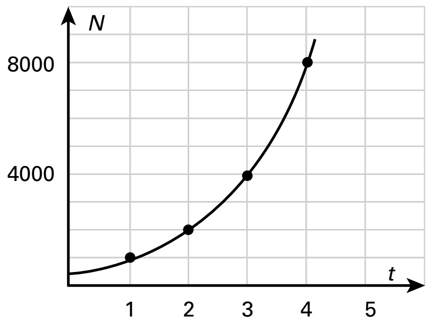
- Escribe una conclusión de esta situación de aprendizaje.

Funciones inversas. Formas algebraica y gráfica

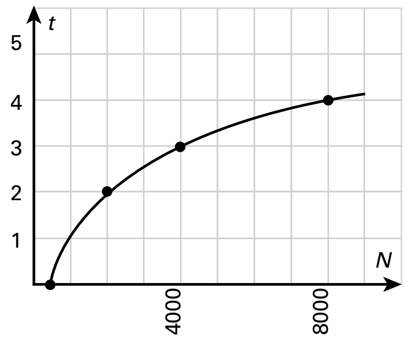
La primera gráfica mostrada abajo representa un experimento en el que un cultivo de bacterias se inicia con 500 de éstas; el tamaño N del cultivo se duplica cada hora y es una función del tiempo t, es decir $N = f(t)$. Por ejemplo, $f(3) = 4000$.

Pero si pensamos de manera inversa y queremos saber cuánto tiempo t se requiere para que la población alcance diversos niveles, entonces el resultado sería la gráfica de la derecha, es decir: t es una función de N. Esta función se llama *función inversa* de f y se escribe como $f^{-1}(N) = t$ se lee "inversa de f" y significa que es el tiempo necesario para que la población alcance el nivel N (es importante aclarar que –1 no es un exponente). Por ejemplo $f^{-1}(4000) = 3$.

t	$N = f(t)$
0	500
1	1000
2	2000
3	4000
4	8000
⋮	⋮
t	$500(2^t)$



$N = f(t)$	t
500	0
1000	1
2000	2
4000	3
8000	4
⋮	⋮
$500(2^t)$	t



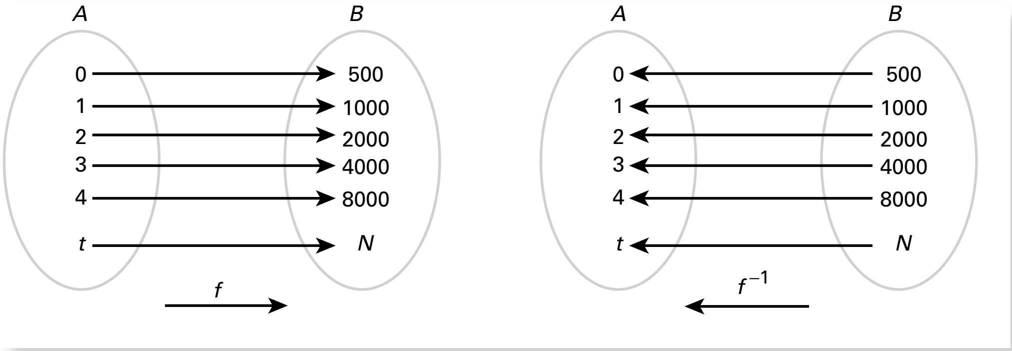
¡Atención! No todas las funciones tienen inversas, sólo las que tienen la propiedad de ser **uno a uno** tienen sus inversas porque no hay ambigüedad en la relación del dominio y el rango.

Función inversa

Una función f uno a uno con dominio A y rango B tiene como *función inversa* a f^{-1} con dominio B y rango A y se define como

$$f^{-1}(y) = x \qquad \text{implica que} \qquad f(x) = y$$

para cualquier y en B.



dominio de f^{-1} = rango de f
rango de f^{-1} = dominio de f

Ejemplos:

1. Si $f(1) = 3$, $f(4) = 5$ y $f(7) = -5$, encuentra $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-5)$.

Solución:
A partir de la definición de $f^{-1}(x)$, entonces

$$f^{-1}(3) = 1 \qquad \text{porque} \qquad f(1) = 3$$

$$f^{-1}(5) = 4 \qquad \text{porque} \qquad f(4) = 5$$

$$f^{-1}(-5) = 7 \qquad \text{porque} \qquad f(7) = -5$$

2. Si $f(x) = x^3$ encuentra $f^{-1}(x)$ a partir de la definición.

Solución:
Como la regla de $f(x) = x^3$ es elevar al cubo entonces, $f^{-1}(x)$ es la regla inversa al extraer raíz cúbica.

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Una manera de comprobar la solución anterior es analizando la regla de cancelación siguiente:

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

Estas relaciones expresan que la función elevar al cubo y la función raíz cúbica se *cancelan mutuamente* cuando se aplican sucesivamente.

De acuerdo con la definición de funciones inversas podemos concluir los pasos a seguir para calcular la inversa de una función uno a uno.

Paso 1. Escribimos la función como $y = f(x)$.
Paso 2. Si es posible resolvemos esta ecuación para x en términos de y.
Paso 3. Para escribir f^{-1} como función de x, intercambiamos x con y. La ecuación que resulte es $y = f^{-1}(x)$.

Ejemplos:

---

1. Encuentra la función inversa de $f(x) = \sqrt{x-1}$ utilizando los pasos explicados anteriormente.

Solución:
De acuerdo al primer paso escribimos

$$y = \sqrt{x-1}$$

Luego resolvemos esta ecuación para x

$$x - 1 = y^2$$

$$x = y^2 + 1$$

(*Continúa*)

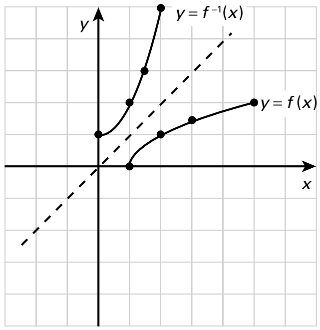
(*Continuación*)

Intercambiamos x por y

$$y = x^2 + 1$$

Finalmente, la función inversa es $f^{-1}(x) = x^2 + 1$.

$f(x) = \sqrt{x-1}$	$f^{-1}(x) = x^2 + 1$
(1, 0)	(0, 1)
(2, 1)	(1, 2)
$\left(3, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, 3\right)$
(5, 2)	(2, 5)



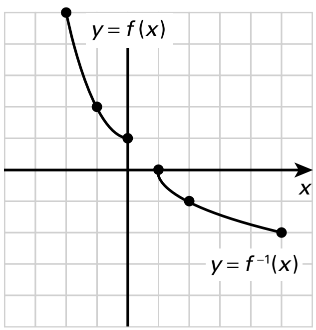
Evidencias de aprendizaje

1. Si $f(0) = 1$, $f(-1) = 2$ y $f(-2) = 5$, encuentra $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ y $f^{-1}(5)$ y confirma si corresponden las gráficas mostradas en la figura adjunta.

$f^{-1}(1) =$

$f^{-1}(2) =$

$f^{-1}(5) =$



2. Encuentra la función inversa de f.

Función	Inversa
$f(x) = 3x + 5$	$f^{-1}(x) =$
$f(x) = 4 - \sqrt{x}$	$f^{-1}(x) =$
$f(x) = \sqrt{3 - x}$	$f^{-1}(x) =$
$f(x) = 3 - x^3$	$f^{-1}(x) =$
$f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$	$f^{-1}(x) =$

3. La expresión $F = \dfrac{9}{5}C + 32$ expresa la temperatura Fahrenheit (F) como una función de la temperatura Celsius (C). Encuentra una fórmula para la función inversa e interprétala.

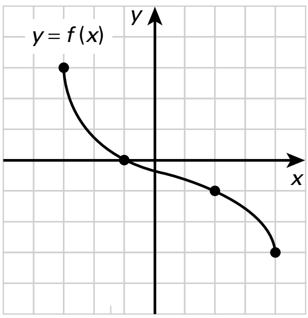
$C =$	Interpretación

4. Dada la gráfica de $f(x)$.

a) ¿Por qué es uno a uno?
b) Escribe el dominio y el rango de $f^{-1}(x)$.

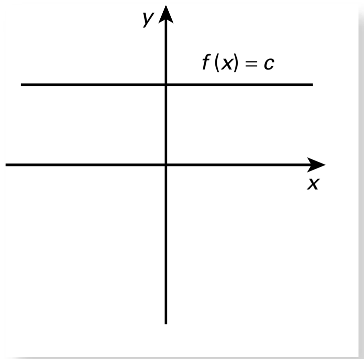
Estima el valor de $f^{-1}(-1)$

¿Por qué es uno a uno?
Dominio: Rango:
$f^{-1}(-1) =$

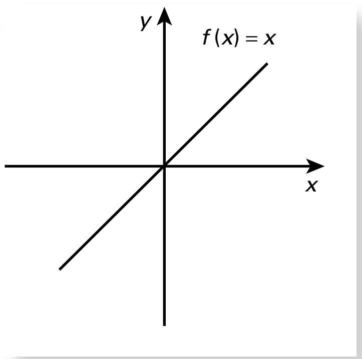


Funciones especiales

Función constante. La *función constante* $f(x) = c$ es aquella que conserva su rango constante y su dominio es $(-\infty, \infty)$.



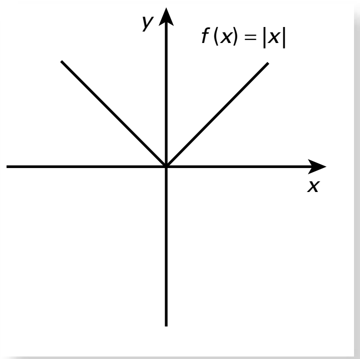
Función identidad. La *función identidad* $f(x) = x$ se conoce así porque es igual que su inversa. Tanto el dominio como el rango están en el intervalo $(-\infty, \infty)$.



Función valor absoluto. La *función valor absoluto* $f(x) = \left| x \right|$ se define como:

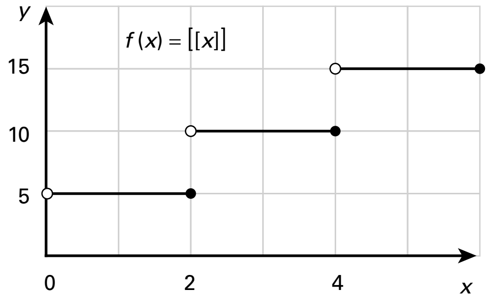
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{cuando} \quad x < 0 \end{cases}$$

Es decir, su rango es: $f(x) \geq 0$



Función escalón. Una función definida por secciones como la de la gráfica siguiente se llama precisamente así, por su forma de escalera. Esta función se escribe como $f(x)=\left[[x]\right]$ y para ser más explícitos observa el siguiente ejemplo de una función de esta naturaleza.

$$f(x)=\begin{cases}5 & \text{si} \quad 0<x\leq 2\\ 10 & \text{si} \quad 2<x\leq 4\\ 15 & \text{si} \quad 4<x\leq 6\end{cases}$$

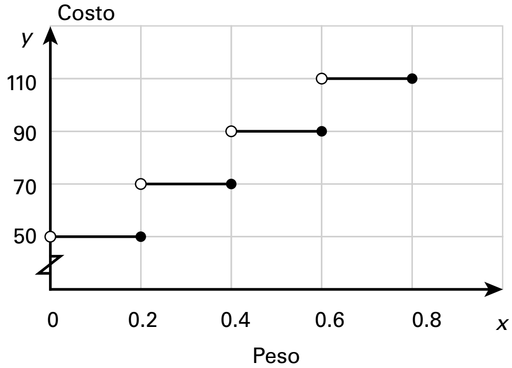


Ejemplos:

El precio que cobra una compañía por el traslado de paquetería de una ciudad a otra es una función del peso de los paquetes y es de acuerdo a la siguiente tabla: traza una gráfica del costo.

Solución

Peso (kg)	Costo ($)
$0 < x \leq 0.2$	50
$0.2 < x \leq 0.4$	70
$0.4 < x \leq 0.6$	90
$0.6 < x \leq 0.8$	110

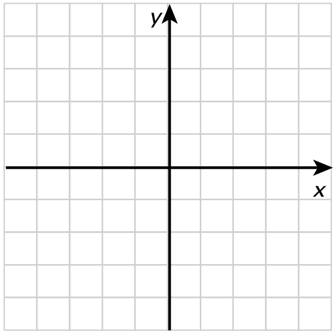


Evidencias de aprendizaje

1. Dada la ecuación de las siguientes funciones, completa la tabla de valores sugerida y traza la gráfica respectiva.

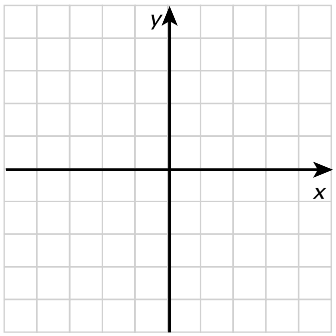
a) $f(x) = |x - 1| - 1$

x	$f(x) = \|x - 1\| - 1$	(x, y)
–2	$f(-2) = \|-2 - 1\| - 1 =$	
–1	$f(-1) = \|-1 - 1\| - 1 =$	
0	$f(0) = \|0 - 1\| - 1 =$	
1	$f(1) = \|1 - 1\| - 1 =$	
2	$f(2) = \|2 - 1\| - 1 =$	



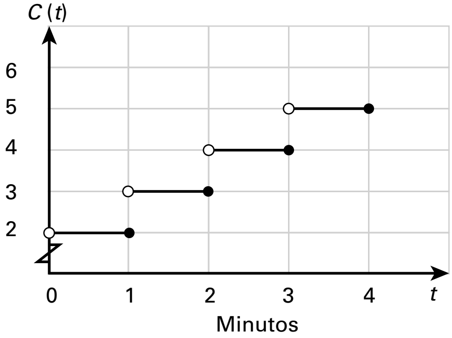
b) $g(x) = |x^2 - 2|$

x	$g(x) = \|x^2 - 2\|$	(x, y)
–2	$g(-2) =$	
–1	$g(-2) =$	
0	$g(0) =$	
1	$g(1) =$	
2	$g(2) =$	

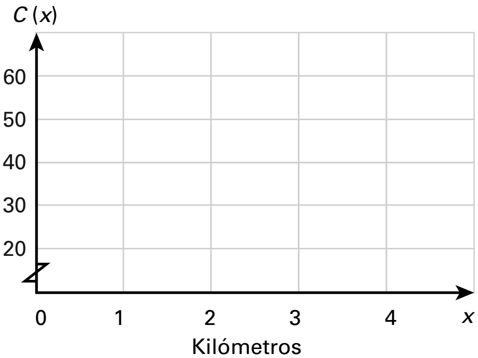


2. El costo de una llamada por telefonía celular es de 2 pesos el primer minuto y 1 peso cada minuto adicional (o fracción de minuto). La gráfica muestra el costo $C(t)$ de una llamada telefónica de 4 minutos. Escribe una expresión algebraica que represente dicha función.

$C(t) = \begin{cases} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases}$



3. Una empresa de taxis cobra 20 pesos por el primer kilómetro al prestar el servicio de transporte personal y 10 pesos por cada kilometro subsecuente (o fracción). Expresa el costo $C(x)$ como función de la distancia recorrida x, y traza la gráfica correspondiente de recorrer 5 kilómetros.

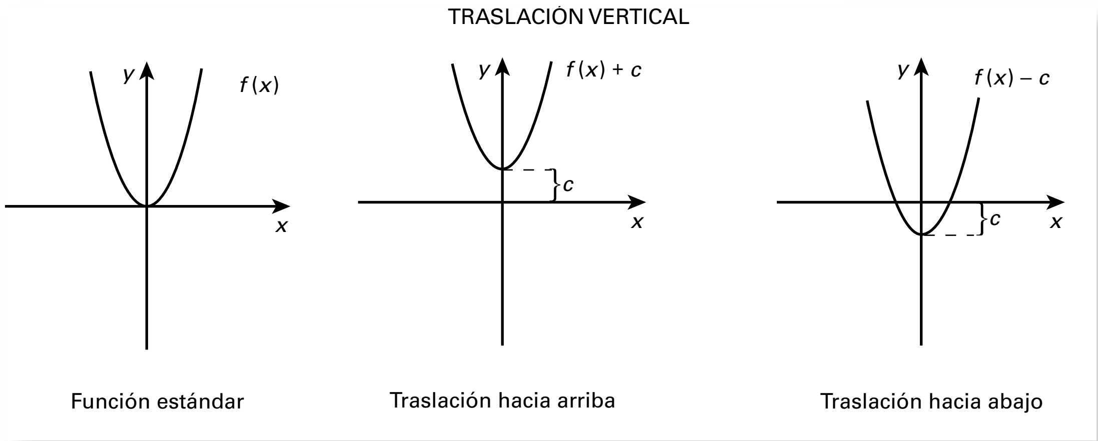


Traslaciones y reflexiones en las gráficas de las funciones

Comprender las transformaciones que sufren las ecuaciones de las funciones nos sirve para reducir y facilitar el trabajo al momento de identificar o bosquejar la gráfica de una función que conocemos en su forma estándar. Las principales transformaciones que trataremos son: las **traslaciones**, los **alargamientos** y las **reflexiones**.

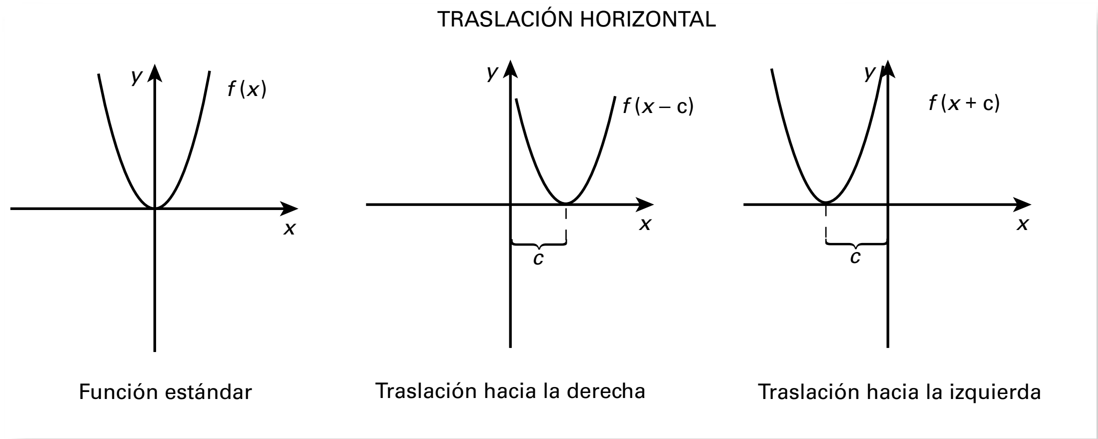
Traslaciones verticales

Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x) + c$ es una traslación de $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia arriba y la gráfica de $y = f(x) - c$ es una traslación c unidades hacia abajo.



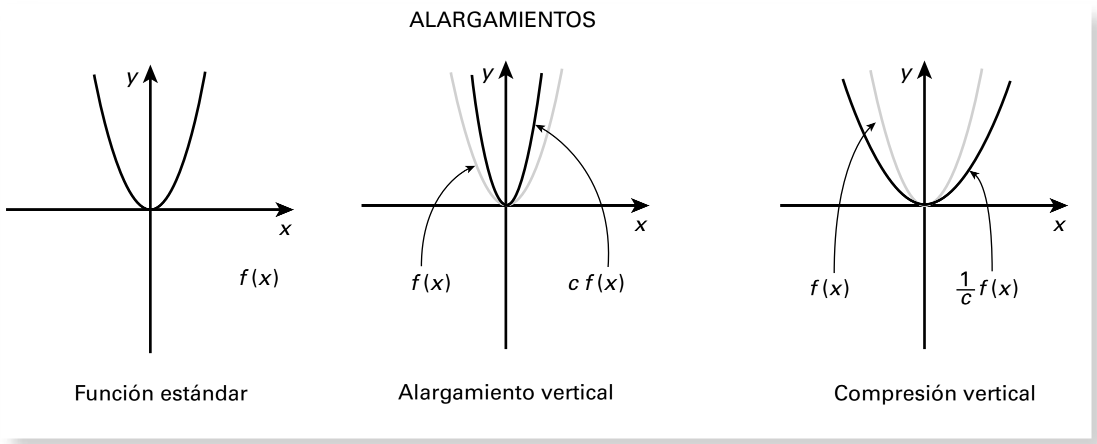
Traslaciones horizontales

Si c es un número positivo, entonces la gráfica de $y = f(x - c)$ es una traslación de $y = f(x)$ desplazada c unidades hacia la derecha y la gráfica de $y = f(x + c)$ es una traslación c unidades hacia la izquierda.



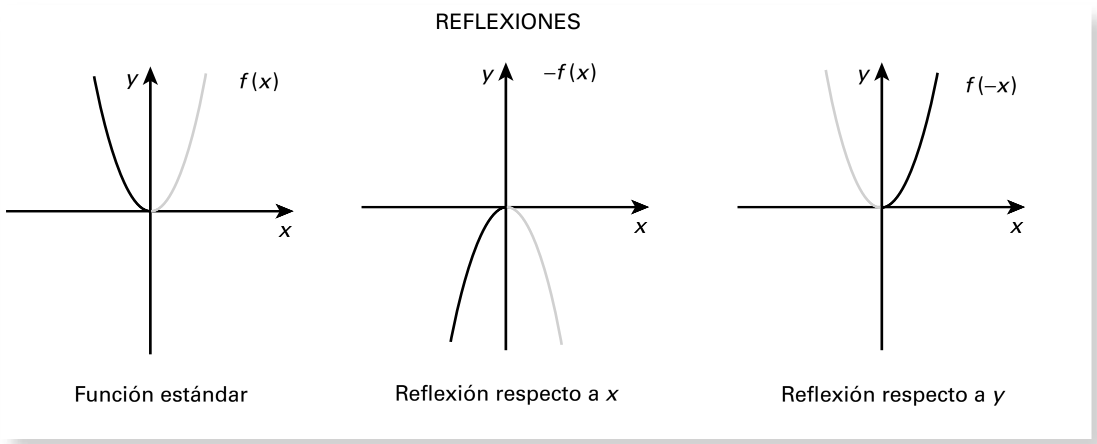
Alargamientos

Si $y = c\,f(x)$, la gráfica de $y = f(x)$ se alarga verticalmente c veces y si $y = \frac{1}{c} f(x)$, se comprime en un factor de c.



Reflexiones

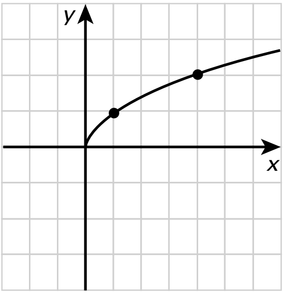
$y = -f(x)$, refleja la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x, y $y = f(-x)$, la refleja con respecto al eje y.



Ejemplos:

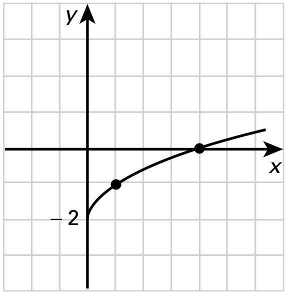
1. Dada la gráfica $y=\sqrt{x}$, utiliza los criterios vistos anteriormente para graficar $y=\sqrt{x}-2$, $y=\sqrt{x-2}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$ $y=2\sqrt{x}$.

Función estándar



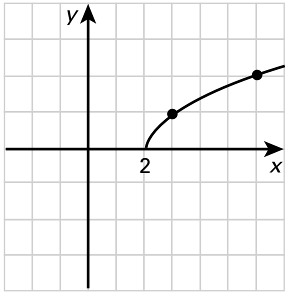
$y=\sqrt{x}$

Traslación vertical



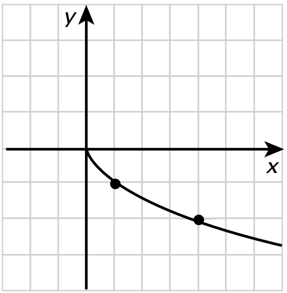
$y=\sqrt{x}-2$

Traslación horizontal



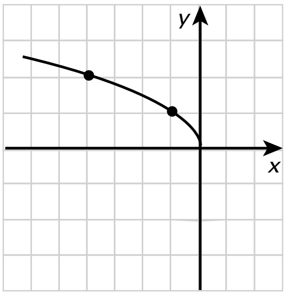
$y=\sqrt{x-2}$

Reflexión respecto a x



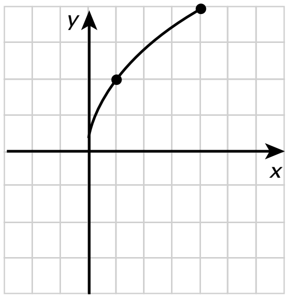
$y=-\sqrt{x}$

Reflexión respecto a y



$y=\sqrt{-x}$

Alargamiento vertical



$y=2\sqrt{x}$

2. Grafica la parábola $y = x^2 + 4x + 3$ a partir de su forma estándar.

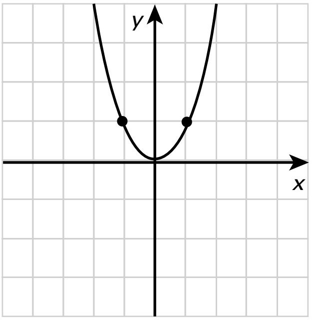
Solución:
Debemos completar el cuadrado para identificar el vértice y las transformaciones de la forma estándar.

$$y = x^2 + 4x + 3$$

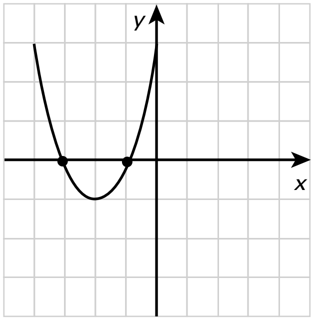
$$y = x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2 + 3$$

$$y = (x + 2)^2 - 1$$

Esta forma de la ecuación nos dice que la curva está desplazada 2 unidades a la izquierda y una hacia abajo.



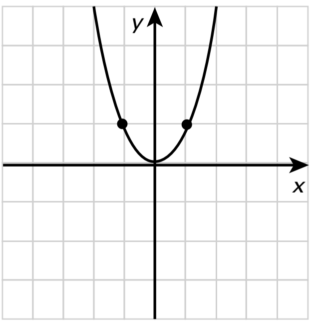
$y = x^2$



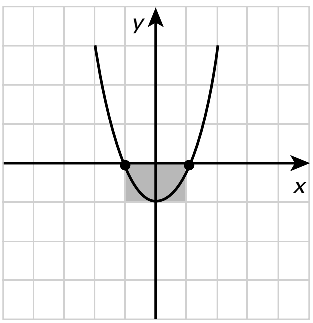
$y = (x + 2)^2 - 1$

3. Grafica la función $y = \left|x^2 - 1\right|$ a partir de su forma estándar.

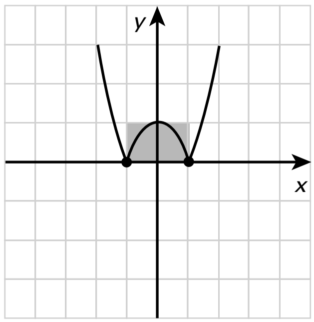
Solución:
Primero se grafica $y = x^2$, enseguida $y = x^2 - 1$, luego recordemos que el valor absoluto convierte la parte negativa de la curva en positiva de modo que los valores de y se reflejan respecto a x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Observa la ilustración siguiente.



$y = x^2$



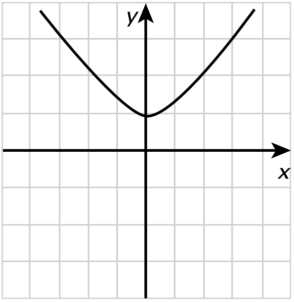
$y = x^2 - 1$



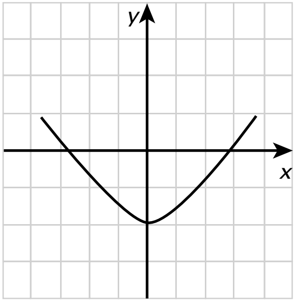
$y = |x^2 - 1|$

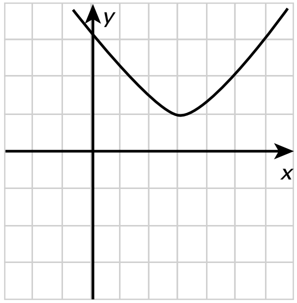
Evidencias de aprendizaje

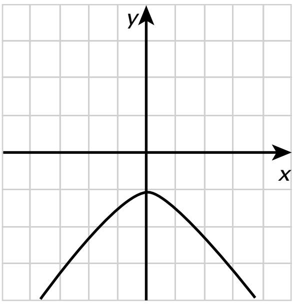
1. Dada la función estándar $y = \sqrt{x^2 + 1}$ y las gráficas de algunas transformaciones, escribir la ecuación correspondiente de cada una de ellas.
Sugerencia: comprueba tus resultados con el programa **Winplot**.

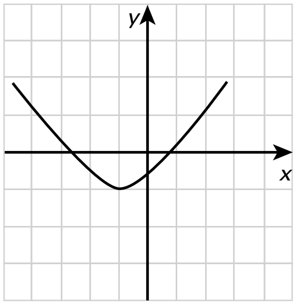


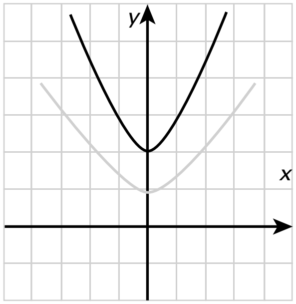
$y = \sqrt{x^2 + 1}$



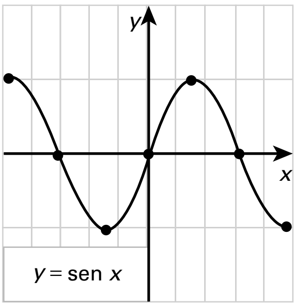


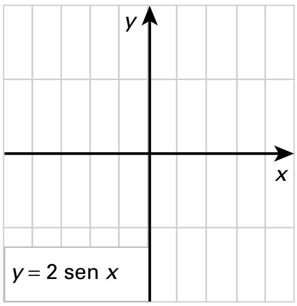


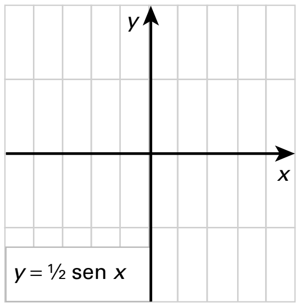




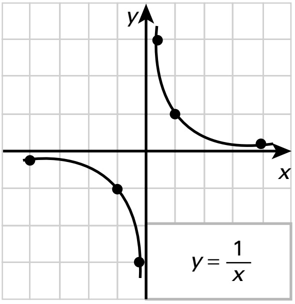
2. Dada la función estándar y = sen x utilízala para graficar y = 2 sen x y $y = \frac{1}{2}$ sen x.

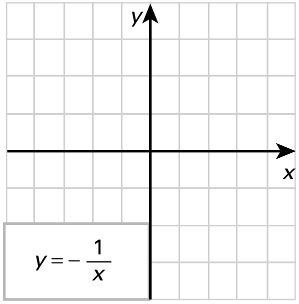


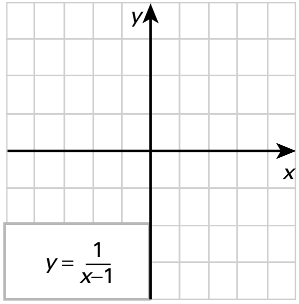




3. Dada la función estándar $y = \frac{1}{x}$ utilízala para graficar $y = -\frac{1}{x}$ y $y = \frac{1}{x-1}$.



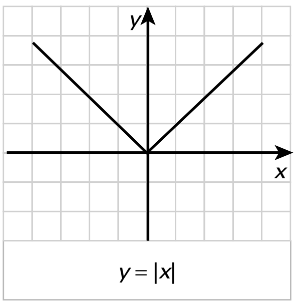


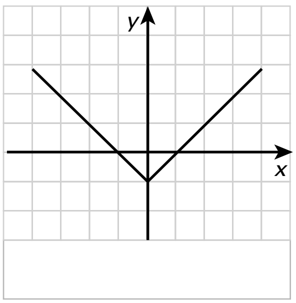


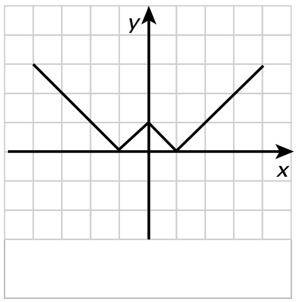
4. Dada la función $y = f(x)$ explica en el renglón de la derecha qué significa cada transformación.

Función	Significado de la transformación
$y = 3f(x)$	
$y = -f(x)$	
$y = 3f(x) - 5$	
$y = f(x-3)$	
$y = \frac{1}{3}f(x)$	

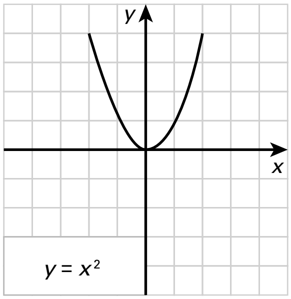
5. Dada la función estándar $y = \lvert x \rvert$ y las gráficas de algunas transformaciones, escribe la ecuación correspondiente de cada una de ellas.

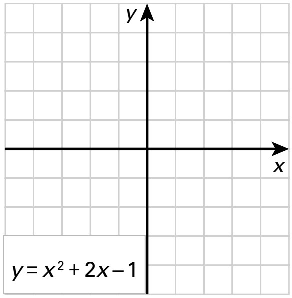


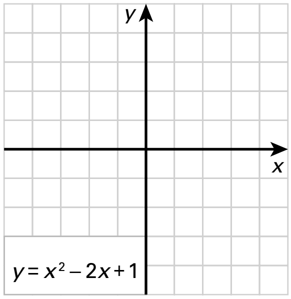




6. Dada la función estándar $y = x^2$ utilízala para graficar $y = x^2 + 2x - 1$ y $y = x^2 - 2x + 1$.







Operaciones con funciones

Las operaciones con funciones son combinaciones entre éstas para obtener nuevas funciones. Si f y g son dos funciones se pueden formar la **suma** $f + g$, la **resta** $f - g$, la **multiplicación** fg y la **división** $\dfrac{f}{g}$ en el campo de los números reales.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones en el campo de los reales tenemos que la definición de cada una de las operaciones anteriores, así como su escritura y su dominio son:

Operación	Notación	Dominio
Suma	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	Elementos en común
Resta	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	Elementos en común
Multiplicación	$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$	Elementos en común
División	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	Elementos en común pero $g(x) \neq 0$

Ejemplos:

1. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentra $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$. Describe sus dominios.

Solución:
El dominio de $x^2 - 2$ son todos los números reales y el de $\sqrt{x}$ es $x \geq 0$, de manera que los números en común de estos dominios son todos los reales mayores o iguales a cero para la suma, resta y multiplicación pero para la división $x > 0$.

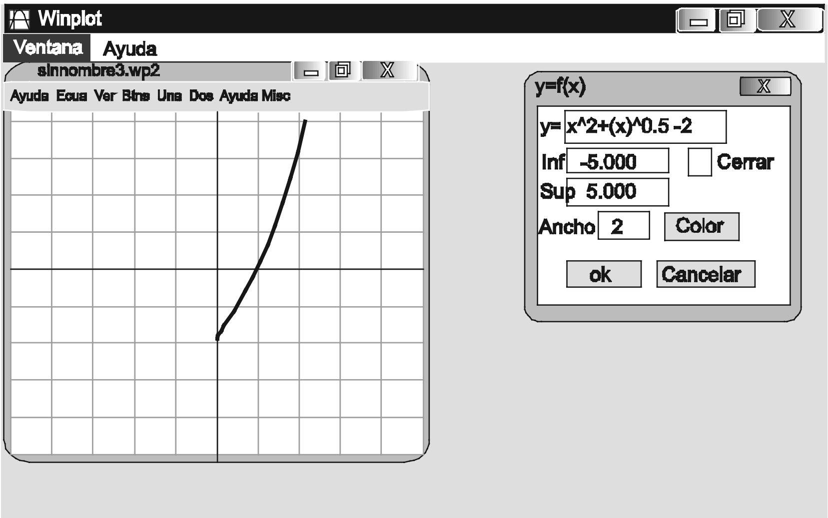
$(f+g)(x) = (x^2 - 2) + \sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} - 2$ Dominio: $x \geq 0$

$(f-g)(x) = (x^2 - 2) - \sqrt{x} = x^2 - \sqrt{x} - 2$ Dominio: $x \geq 0$

$(fg)(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x}$ Dominio: $x \geq 0$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2 - 2}{\sqrt{x}}$ Dominio: $x > 0$

Winplot. Si utilizamos el programa en computadora para graficar la suma $(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x} - 2$, el resultado es el siguiente y se puede comprobar que el dominio es $x \geq 0$.



(*Continúa*)

(*Continuación*)

Trabajo de investigación. Utiliza el programa **Winplot** para obtener las gráficas de la resta, la multiplicación y la división de las funciones del **ejemplo 1**.

2. Toma como referencia las funciones f y g del **ejemplo 1** y calcula $f+g$, $f-g$, fg, y g/f para los valores de $x = 0, 0.5, 1, 2$.

x	$f(x) = x^2 - 2$	$g(x) = \sqrt{x}$	$(f+g)(x)$	$(f-g)(x)$	$(fg)(x)$	$(g/f)(x)$
0	$0^2 - 2 = -2$	$\sqrt{0} = 0$	-2	-2	0	$\frac{0}{-2} = 0$
0.5	$(0.5)^2 - 2 = -1.75$	$\sqrt{0.5} \approx 0.70$	≈ -1.05	≈ -2.45	≈ -1.23	-0.4
1	$1^2 - 2 = -1$	$\sqrt{1} = 1$	0	-2	-1	-1
2	$2^2 - 2 = 2$	$\sqrt{2} \approx 1.41$	≈ 3.41	≈ 0.6	≈ 2.82	≈ 0.71

Como puedes ver, esta tabla nos es útil para aproximar las gráficas del **ejemplo 1** sin la necesidad de un programa de computadora.

Evidencias de aprendizaje

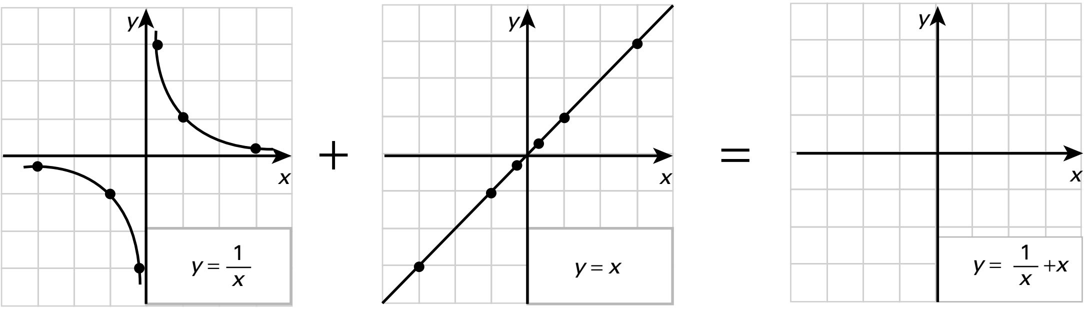
1. Encuentra $f+g$, $f-g$, fg y $\frac{f}{g}$ si $f(x) = x^3 + 2x$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Operación	Función resultante	Dominio
$f+g$		
$f-g$		
fg		
$\frac{f}{g}$		

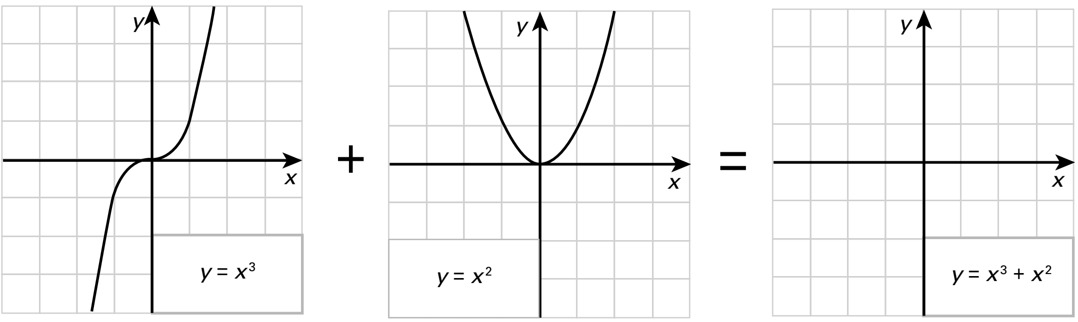
2. Encuentra $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x) = 2x^2$.

Operación	Función resultante	Dominio
$f+g$		
$f-g$		
fg		
$\dfrac{f}{g}$		

3. Dadas las gráficas de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x$, grafica $(f+g)(x)$ a partir de las gráficas que aparecen a continuación.



4. Dadas las gráficas de $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$ grafica $(f+g)(x)$ a partir de las gráficas que aparecen a continuación.



Composición de funciones

Hay otra manera de combinar dos funciones, por ejemplo si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ significa que y también depende de x, es decir

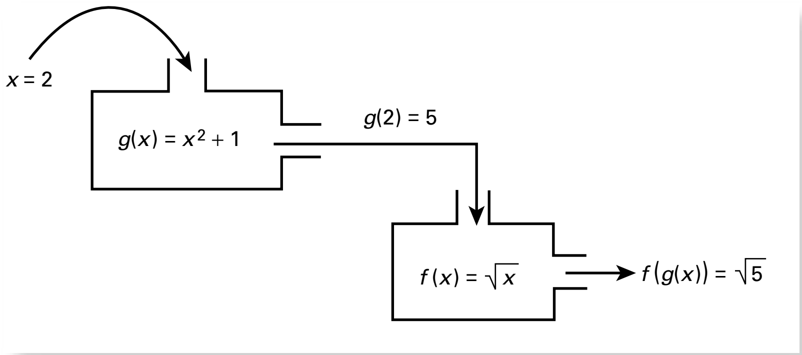
$$y = f(u) = f\big(g(x)\big)$$

Este procedimiento se llama *composición* porque la nueva función se compone de las dos funciones dadas f y g.

Definición. Dadas dos funciones f y g, se dice que la función compuesta $f\big(g(x)\big)$ está definida por

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

lo que significa es que para calcular esta nueva función primero hay que aplicar la regla de $g(x)$ y a este resultado aplicarle la regla de f. Con el diagrama siguiente ilustramos esta definición.

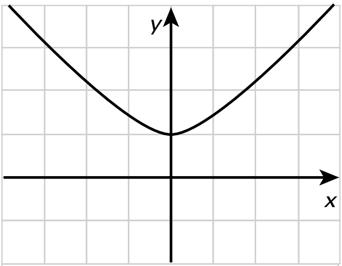


Ejemplos:

1. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$, encuentra $(f \circ g)(x)$, su gráfica y su dominio.

Solución:
Aquí debemos aplicar primero la regla de g y enseguida la de f.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad \text{Dominio: } -\infty < x < \infty$$



$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$

2. Con las funciones del **ejemplo 1** encuentra $(g \circ f)(x)$.

Solución:
Aquí debemos aplicar primero la regla de f y enseguida la de g

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1$$

3. Sabiendo que $F(x) = (f \circ g)(x)$, encuentra $f(x)$ y $g(x)$ si $F(x) = \sqrt{x-9}$.

Solución:
Como $F(x) = \sqrt{x-9}$ entonces la regla de dependencia es: *primero restar* 9 y *después obtener la raíz cuadrada*. De manera que hacemos

$$g(x) = x - 9 \quad \text{y} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

Evidencias de aprendizaje

1. Encuentra $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(x)$, $(g \circ g)(x)$ para las funciones dadas de f y g.

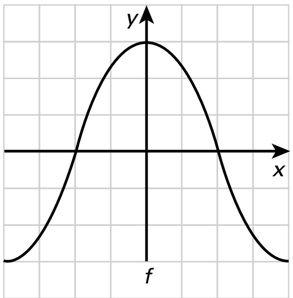
$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$	$(f \circ f)(x)$	$(g \circ g)(x)$
$2 - x$	$3x + 2$				
x^2	$\sqrt{1-x}$				

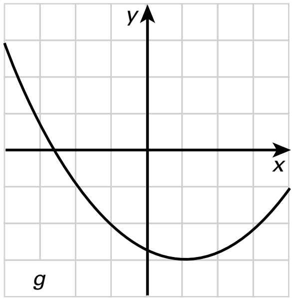
2. Sabiendo que $F(x) = (f \circ g)(x)$, encuentra $f(x)$ y $g(x)$.

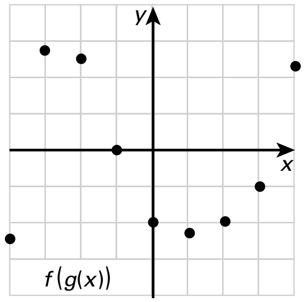
a) $F(x) = \cos\sqrt{x}$ $f(x) =$ ____________ $g(x) =$ ____________

b) $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ $f(x) =$ ____________ $g(x) =$ ____________

3. Utiliza las gráficas de f y g para estimar el valor de $(f \circ g)(x)$ para $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Verifica si los puntos de la tercera gráfica corresponden a estos valores y si es así traza la gráfica.







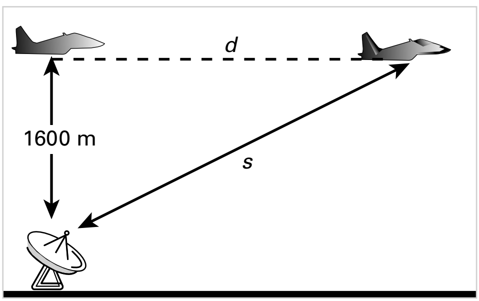
Aplicaciones

4. Un avión vuela a una velocidad de 360 km/h, a una altitud de 1600 metros y pasa directamente sobre un radar en el instante $t = 0$.

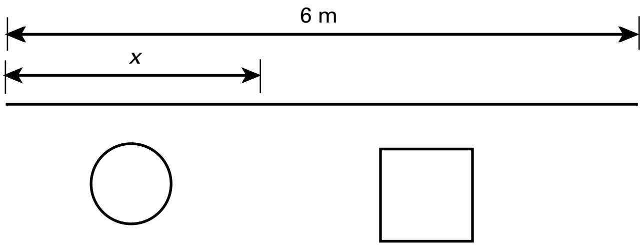
a) Expresa la distancia horizontal d en kilómetros que el avión ha volado como función del tiempo t.
Sugerencia: en el movimiento rectilíneo a velocidad constante la distancia es el producto de la velocidad por el tiempo.

b) Expresa la distancia s entre el avión y el radar como función de d (utiliza el teorema de Pitágoras).

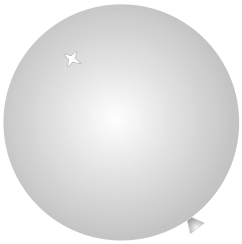
c) Aplica la composición de funciones para expresar s como función de t.



5. Una varilla de alambre de 6 metros de largo se corta en dos piezas. Una de longitud x se dobla para formar un círculo, y la otra parte $(6 - x)$ para formar un cuadrado. Expresa el área total de las dos figuras como una función de x.



6. Un globo esférico se está inflando. Si el radio del globo aumenta a razón de 1 cm/s, expresa el volumen del globo como una función del tiempo t. Recuerda que el volumen de una esfera se obtiene con $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 2

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• reconocer las características de las funciones inversas?	
• describir en forma gráfica y algebraica la inversa de una función?	
• reconocer las funciones valor absoluto, constante, idéntica y escalonada?	
• aplicar las transformaciones de las gráficas de las funciones?	
• aplicar las operaciones con funciones?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• obtener la relación inversa de una función y determinar si ésta también es una función?	
• utilizar las funciones valor absoluto, idéntica, constante y escalonadas, para describir relaciones entre algunas variables?	
• construir gráficas y expresiones de funciones, aplicando traslaciones y reflexiones a las gráficas de otras funciones?	
• combinar funciones para obtener nuevas funciones a través de sus operaciones?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.1. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

BLOQUE 3

Funciones polinomiales I

Una función polinomial con frecuencia se utiliza para modelar volúmenes de figuras geométricas. Por ejemplo, el volumen de un cilindro coronado por un cono.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos polinomiales aplicando las propiedades de las funciones de grados cero, uno y dos, para representar situaciones que involucren tasas nulas, razones de cambio promedio o constante, y la obtención de valores óptimos, para resolver situaciones y problemas teóricos o prácticos, concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos polinomiales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Interpretar tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a las funciones polinomiales.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Caracterizar las funciones polinomiales en una variable.
- Describir las características algebraicas de las funciones polinomiales de grado cero, uno y dos.
- Definir la influencia de los parámetros de funciones de grados cero, uno y dos en su representación gráfica.

- Definir las funciones polinomiales de grado uno y las particularidades de los modelos lineales.
- Definir las funciones polinomiales de grado dos y las particularidades de los modelos cuadráticos.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Reconocer funciones polinomiales en su forma general y en sus expresiones particulares.
- Distinguir el grado, el coeficiente principal y el término constante de una función polinomial.
- Explicar que las funciones constante, lineal y cuadrática, constituyen casos particulares de las funciones polinomiales de grados cero, uno y dos, respectivamente.
- Aplicar modelos lineales y cuadráticos para la resolución de problemas.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Mostrar disposición para involucrarse en actividades relacionadas con la asignatura.
- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerar los de otras personas.
- Reflexionar sobre la ventaja de realizar transformaciones en gráficas para simplificar procesos algebraicos o geométricos.
- Valorar la utilidad de los modelos lineales y cuadráticos para resolver diversos problemas prácticos.
- Reconocer sus errores en los procedimientos y mostrar disposición para solucionarlos.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Comparar el modelo general de las funciones polinomiales con los de funciones particulares y determinar si corresponden a dicha clase de funciones.
- Identificar la forma polinomial de las funciones constante, lineal y cuadrática, así como sus gráficas respectivas.
- Determinar si la situación corresponde a un modelo lineal o cuadrático empleando los criterios de comportamientos de datos en tablas, descripción de enunciados, tipos de gráficas y regularidades particulares observadas.
- Emplear los modelos lineales y cuadráticos para describir situaciones teóricas o prácticas que implican o no, razones de crecimiento o decrecimiento constante que se asocian con dichos modelos.

Evidencias de aprendizaje

- Durante la explicación de procesos de solución, hace uso de las representaciones de funciones polinomiales particulares, de distinto grado, con todos los exponentes sucesivos y sin algunos de éstos, y establece cuál es su grado, su coeficiente principal y su término constante.
- Representar gráficamente las funciones lineales como rectas oblicuas; elige modelos lineales con base en razones de cambio o promedio constante, o en primeras diferencias finitas.
- Resuelve problemas aplicando modelos lineales o cuadráticos, y sustenta su empleo.

Actividad de aprendizaje significativo

Supón que adquieres una computadora con un costo de 12,000 pesos y que se deprecia en forma lineal 2,400 pesos por año.

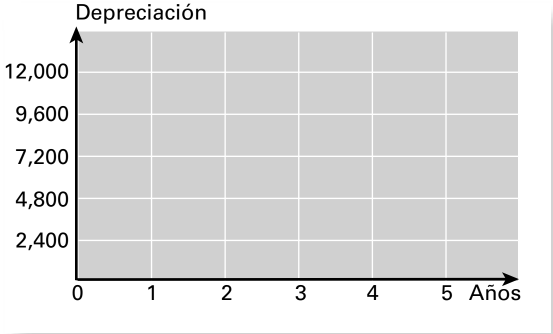
a) Escribe un modelo algebraico y gráfico para calcular la depreciación $C(t)$ de la computadora en función del tiempo t. Completa la siguiente tabla de depreciación.

Año	0	1	2	3	4	5
Costo	12,000					

b) ¿En cuánto tiempo perderá todo su valor?
c) ¿Cuándo la computadora tiene un valor de 6,000 pesos?

Construye tu conocimiento

- Reflexiona sobre el costo inicial de la computadora, ¿corresponde a la ordenada en el origen de un modelo lineal?
- La depreciación (2,400 pesos/año), ¿es la pendiente o razón de cambio del modelo?
- ¿Puedes construir el modelo algebraico sobre el siguiente sistema de coordenadas?



Trabajo de investigación

- Consulta la razón por la que se deprecian las computadoras y los teléfonos celulares con tanta rapidez.
- ¿Qué estamos haciendo en México con la basura generada por el desarrollo tecnológico? ¿Estamos actuando con una actitud responsable y ecológica?

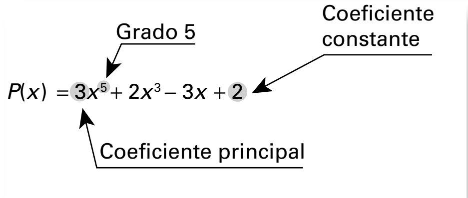
Definición de polinomio

Un **polinomio** $P(x)$ de **grado** n es una función de la forma

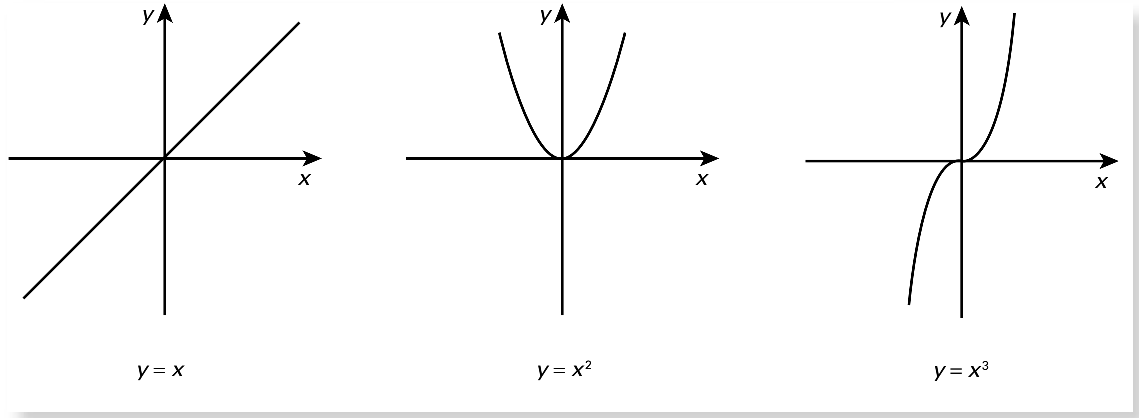
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

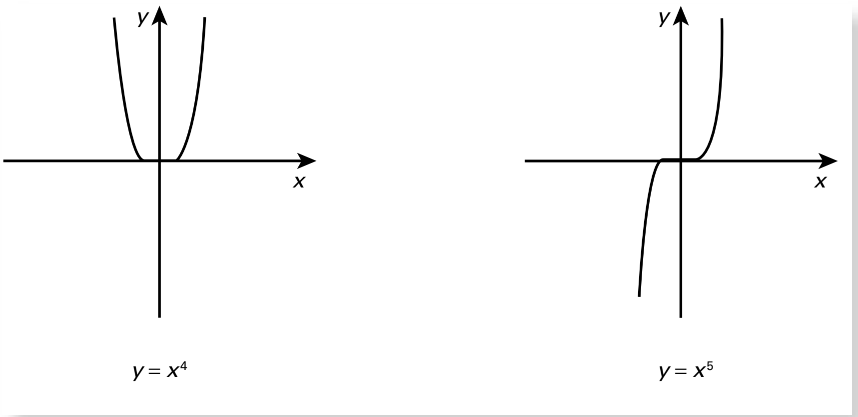
donde $a^n \neq 0$. Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio, a_0 es el **coeficiente constante** y a_n es el coeficiente de la potencia más grande o **coeficiente principal**.

Por ejemplo, en el polinomio $P(x) = 3x^5 + 2x^3 - 3x + 2$ debemos destacar los siguientes elementos:

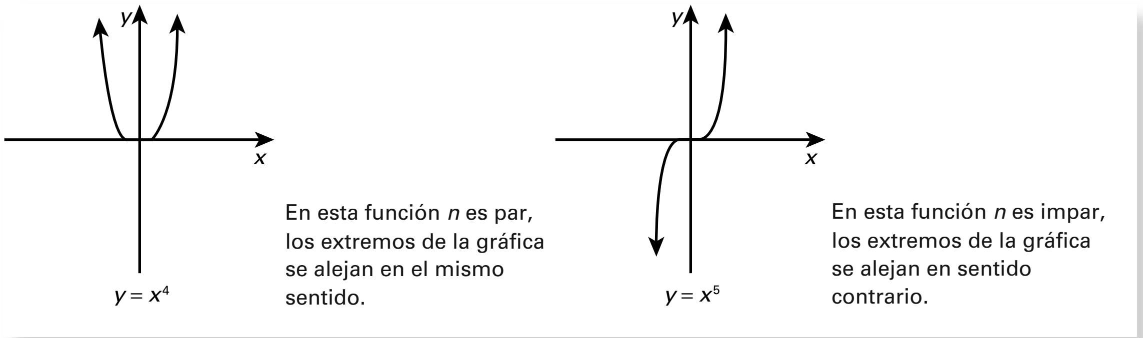


Los **monomios** $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ son las expresiones algebraicas más simples de un polinomio y sus gráficas son las siguientes:





Si observas con atención las gráficas anteriores vas a encontrar que, cuando n es impar, $(-x)^n = -x^n$ y los extremos de la gráfica se alejan en sentidos contrarios. Si n es par $(-x)^n = x^n$, entonces los extremos de la curva se alejan en el mismo sentido.



Funciones polinomiales de grados cero, uno y dos

Función lineal

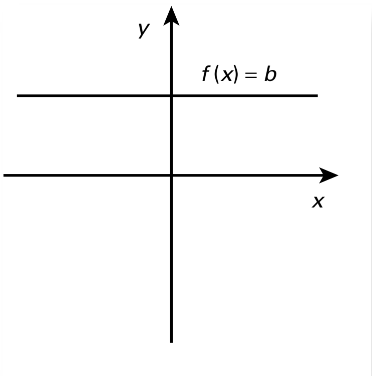
Es una función de **grado uno** y corresponde a la ecuación de una línea recta y tiene la forma

$$f(x) = mx + b$$

donde m es la **pendiente** o **razón de cambio constante** y b la **ordenada en el origen** o intersección con el eje y.

Función constante

Si en la función $f(x) = mx + b$ la pendiente $m = 0$, entonces la función se conoce como **función constante** porque todos sus valores son iguales a b. La figura muestra la gráfica de esta función.



Parámetros de influencia en la línea recta

Es fácil descubrir que los parámetros de influencia en una función lineal son su pendiente m y su ordenada en el origen b porque definen la razón de cambio de la recta y la intersección con el eje y respectivamente.

Ejemplos:

1. Grafica las siguientes funciones lineales y destaca la pendiente m y la ordenada en el origen b.

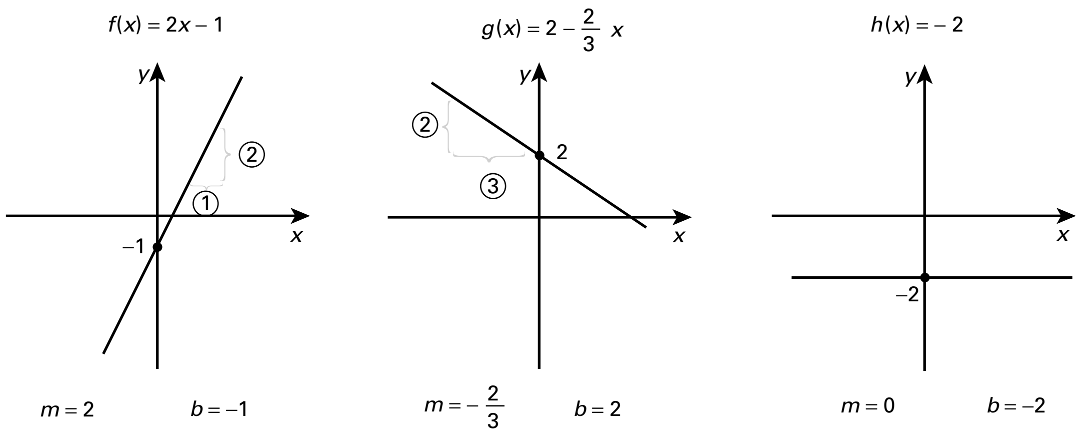
a) $f(x) = 2x - 1$ *b*) $g(x) = 2 - \frac{2}{3}x$ *c*) $h(x) = -2$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Solución:

En la primera gráfica a partir del punto (0, –1) hay una elevación de 2 unidades por 1 de avance (*la pendiente es positiva*); en la gráfica de enmedio a partir de la ordenada en el origen (0, 2) descendemos 2 y avanzamos 3 (*la pendiente es negativa*), y en la última la *y* permanece constante.



2. Una recta pasa por los puntos (–3, 4) y (3, –1), bosqueja su gráfica y expresa su ecuación como una función lineal.

Calculamos primero la pendiente de la recta

$$m = \frac{-1-4}{3-(-3)} = -\frac{5}{6}$$

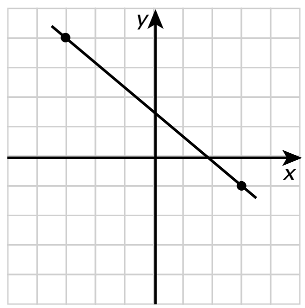
Enseguida obtenemos la ecuación con la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = -\frac{5}{6}\big(x - (-3)\big)$$

$$y - 4 = -\frac{5}{6}x - \frac{5}{2} \qquad \text{Simplificando.}$$

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{3}{2} \qquad \text{Trasponiendo términos y simplificando.}$$

En la gráfica puedes comprobar que la pendiente $m = -\frac{5}{6}$
y la ordenada en el origen es $b = \frac{3}{2}$



Aplicación

3. Cristina observó que conducir su automóvil durante el mes de mayo le costó 5,000 pesos por 800 kilómetros y en junio 6,000 pesos por 1,200 kilómetros.

a) Expresa el costo $C(x)$ en función de la distancia recorrida x, suponiendo que el modelo es una relación lineal.
b) ¿Qué representa la pendiente del modelo? Traza la gráfica.
c) ¿Qué significa la intersección de la recta con el eje y?

Solución:

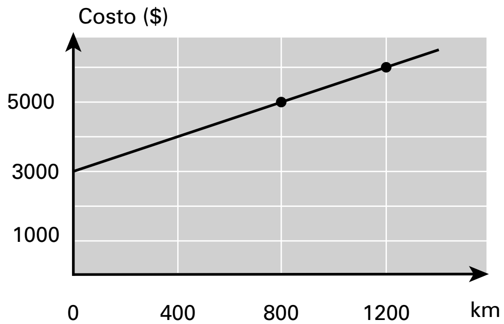
a) La pendiente del modelo es $m = \frac{6000-5000}{1200-800} = \frac{1000}{400} = \frac{5}{2}$.

El modelo de ecuación es

$$C(x) - 5000 = \frac{5}{2}(x - 800)$$

$$C(x) = \frac{5}{2}x + 3000$$

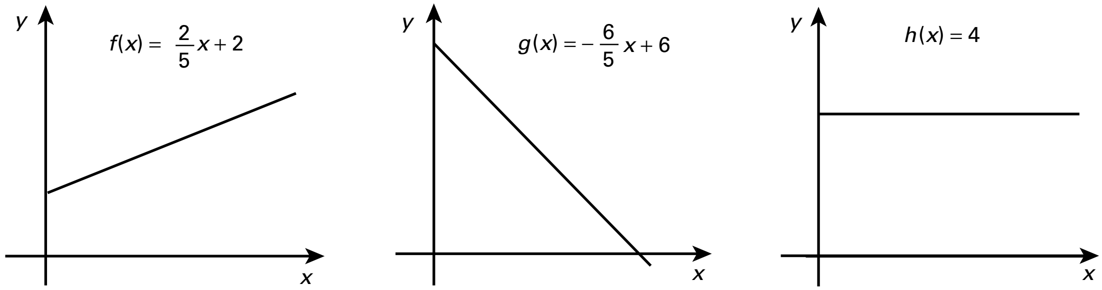
b) La pendiente $m = \frac{5}{2}$ significa que por cada 2 km recorridos el costo es de 5 pesos. La gráfica se muestra enseguida.



c) La intersección de la recta con el eje y significa que aunque no recorra ningún kilómetro de todas maneras tiene un costo fijo de 3,000 pesos.

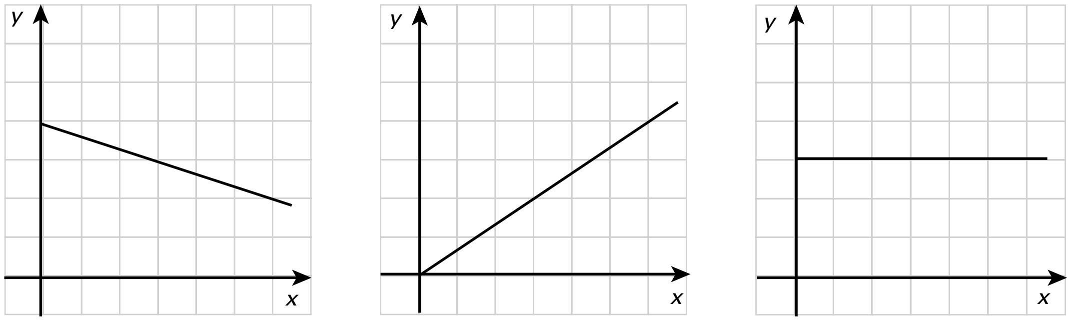
Evidencias de aprendizaje

1. Determina la pendiente m y la ordenada en el origen b en cada una de las siguientes funciones lineales.



$m =$ $b =$ $m =$ $b =$ $m =$ $b =$

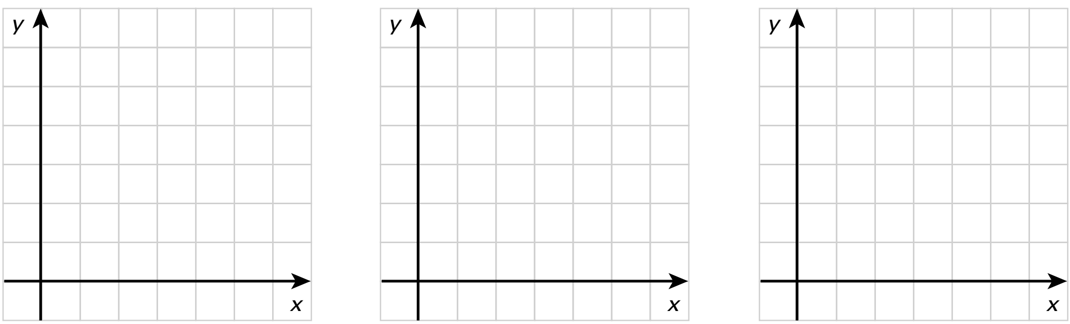
2. Escribe debajo de cada gráfica la ecuación correspondiente en forma de función.



$f(x) =$ $g(x) =$ $h(x) =$

3. Encuentra la gráfica y escribe cada ecuación en forma de función:

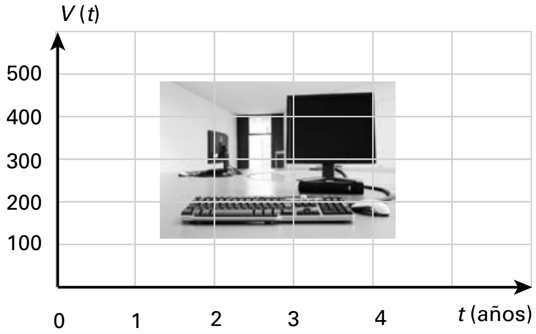
a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ *b*) $2x - 3y = 0$ *c*) $k(x) - 3 = 0$



Aplicaciones

4. Un pequeño negocio adquiere una computadora por 400 dólares. Si la depreciación de su valor $V(t)$ es lineal en función del tiempo t y aproximadamente es de 95 dólares por año:

a) Obtén un modelo algebraico y la gráfica que relacionen $V(t)$ con t.
b) Determina el valor de la computadora en 3 años.
c) ¿Cuándo la computadora vale 20 dólares?

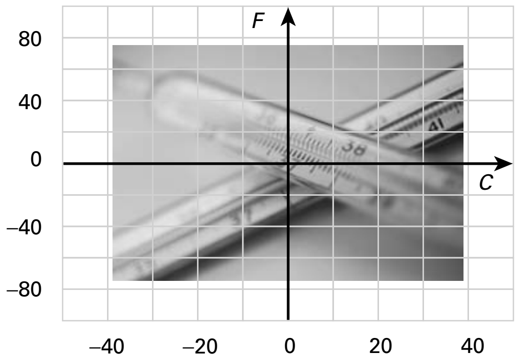


5. La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Completa la tabla para comparar las dos escalas en los valores dados. Bosqueja una gráfica de la relación de temperaturas.
b) Determina la temperatura a la cual las escalas coinciden.

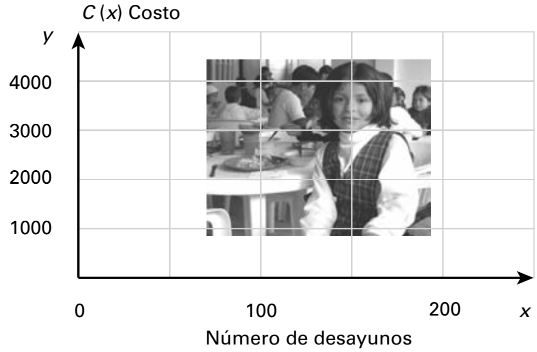
Sugerencia: llama T a la temperatura donde coinciden las dos escalas.

C	F
–30°	
–20°	
–10°	
0°	
	50°
	68°
	86°



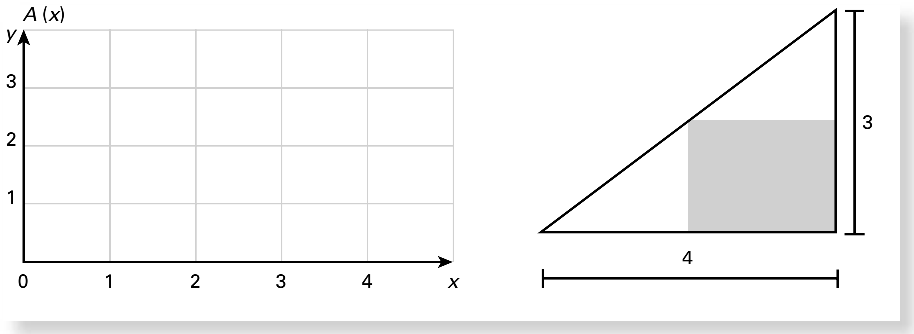
6. Un grupo de estudiantes establece que el costo de producción para elaborar 100 desayunos escolares es de 2,000 pesos y 3,000 pesos si elaboran 200.

a) Supón que la relación entre costo y el número de desayunos es lineal. Obtén una expresión funcional que exprese esta relación y después grafica la función.
b) ¿Cuál es la pendiente de la función y qué significa?
c) ¿Cuál es la intersección con el eje *y* y qué representa?



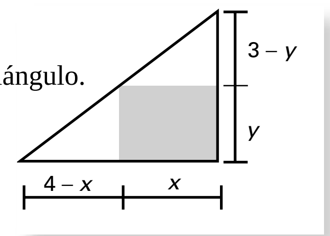
Actividad de aprendizaje significativo

Se inscribe un rectángulo en un triángulo rectángulo como el de la figura con catetos de 3 y 4 centímetros. Si dos de los lados del rectángulo están sobre los catetos, encuentra una expresión que calcule el área de los posibles rectángulos que pueden inscribirse y traza una gráfica para aproximar el rectángulo de mayor área.



Construye tu conocimiento

- Observa y analiza el siguiente triángulo.



- Estarás de acuerdo que el área del rectángulo es $A = xy$.
- Analiza la siguiente relación en el triángulo:

$$\frac{3-y}{x}=\frac{3}{4}.$$

- Despeja y de la igualdad anterior y sustituye su valor en $A = xy$.
- Asígnale valores a x desde 0 hasta 4 y traza la gráfica.

x	0	1	2	3	4
$A(x)$					

- La gráfica debe resultar una parábola con la concavidad hacia abajo; ya puedes aproximar $A(x)$ máxima.

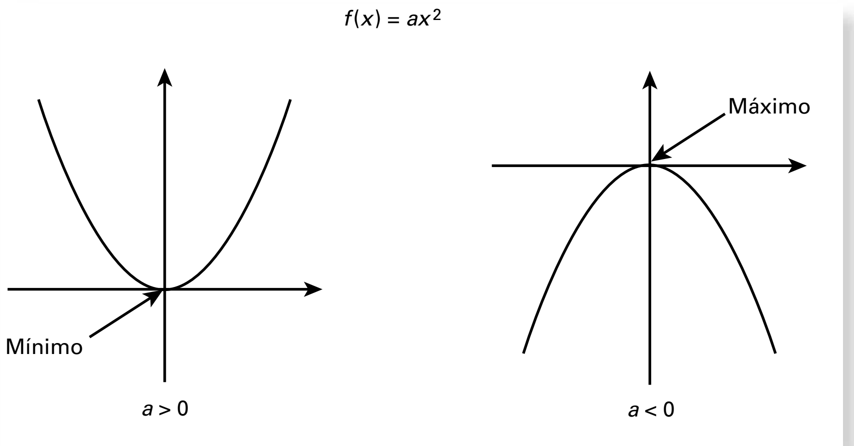
Funciones cuadráticas o de grado dos

Otro caso de funciones polinomiales de segundo grado con el cual estamos familiarizados, es la **función cuadrática**, cuya ecuación es

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$. Su gráfica es una **parábola**.

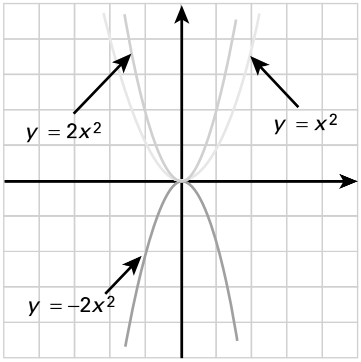
Cuando $b = 0$ y $c = 0$ ocurre la forma más sencilla de una función cuadrática, es decir, $f(x) = ax^2$. Su gráfica es una **parábola** con el vértice en (0, 0). Si $a > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba y el vértice es un punto mínimo en la gráfica; si $a < 0$, entonces el vértice es un punto máximo y la concavidad es hacia abajo.

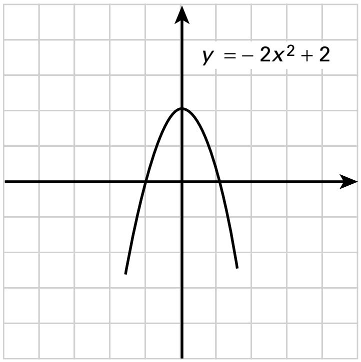


Ejemplos:

1. **Gráfica de una función cuadrática**. Traza la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 2$.

   Solución:
   Primero dibujamos la forma estándar $y = x^2$; después multiplicamos cada punto de esta curva por 2 para obtener $y = 2x^2$. Luego reflejamos ésta en el eje x para tener $y = -2x^2$. Finalmente, desplazamos la última figura dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica $y = -2x^2 + 2$.





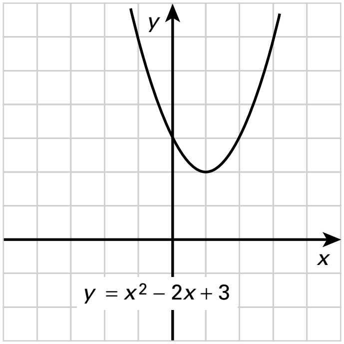
2. **Gráfica de una función cuadrática completando el cuadrado.**

   a) Traza la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$

   Solución:
   Para hallar la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ completamos el cuadrado y escribimos su ecuación en su forma normal o estándar.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$	Función dada.
$f(x) = x^2 - 2x + \underbrace{1^2 - 1^2}_{cero} + 3$	Completamos el cuadrado sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.
$f(x) = (x-1)^2 + 2$	Simplificando, hallamos la forma estándar.

   Esta última expresión nos dice que es una parábola cuya gráfica tiene un desplazamiento horizontal de 1 a la derecha, y 2 unidades verticales hacia arriba y como $a > 0$ la parábola tiene su concavidad hacia arriba.

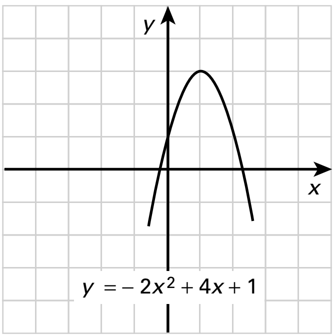


b) Traza la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

Solución:
Para hallar la gráfica de $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ es fundamental completar el cuadrado y escribir su ecuación en su forma normal o estándar. El método es el siguiente:

$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$	Función dada.
$f(x) = -2(x^2 - 2x) + 1$	Se factoriza el −2 en términos de *x*.
$f(x) = -2(x^2 - 2x + 1^2) - (-2)(1^2) + 1$	
	Completamos el cuadrado sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x*.
$f(x) = -2(x-1)^2 + 3$	Simplificando, hallamos la forma estándar.

Esta última expresión nos dice que es una parábola cuya gráfica tiene un desplazamiento horizontal de 1 unidad a la derecha, y 3 unidades verticales hacia arriba y como $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

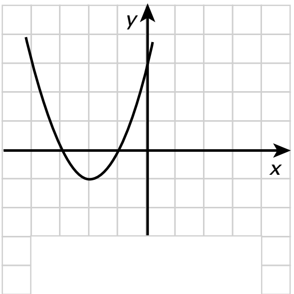


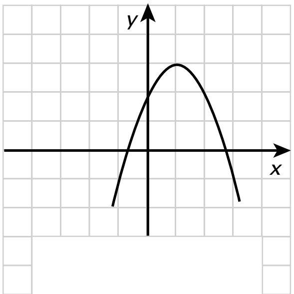
Si en el ejemplo anterior comparamos el resultado con la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, el vértice de la parábola es el punto $V(h,k)$ por lo que la función tiene un **máximo** si $a < 0$ o un **mínimo** si $a > 0$ cuando $f(h) = k$.

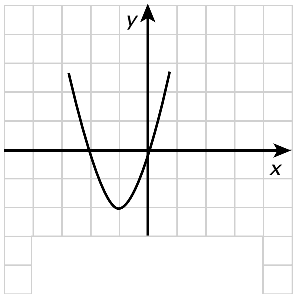
Evidencias de aprendizaje

1. Asocia cada una de las siguientes funciones con sus respectivas gráficas escribiendo su ecuación debajo de cada curva.

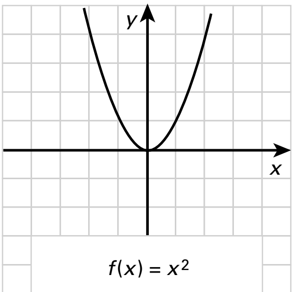
a) $f(x)=2(x+1)^2-2$ *b*) $g(x)=(x+2)^2-1$ c) $h(x)=-(x-1)^2+3$

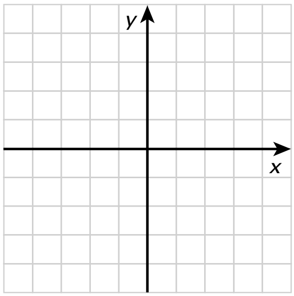


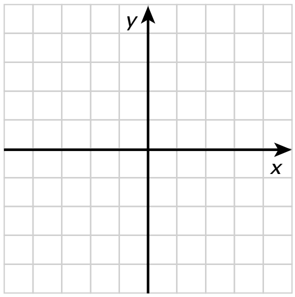




2. A partir de la función estándar $f(x) = x^2$ dibuja las parábolas $g(x) = (x + 2)^2 - 3$ y $h(x) = -2(x + 2)^2 + 3$.

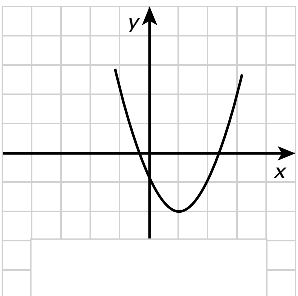


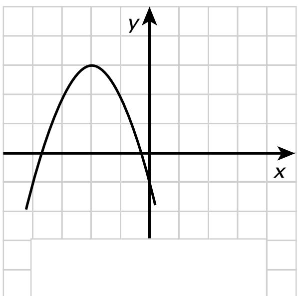


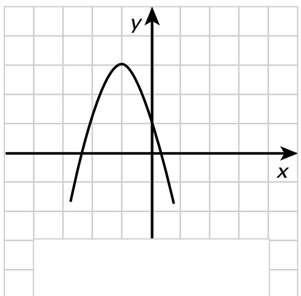


3. Completa el cuadrado y transforma la función dada en forma estándar para que puedas asociarla y escribirla en su gráfica correspondiente.

a) $f(x)=-x^2-4x-1$ *b*) $g(x)=x^2-2x-1$ c) $h(x)=-2x^2-4x+1$







Valor máximo o mínimo de una parábola

Escribir una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ en su forma estándar $f(x)=a(x-h)^2+k$ nos auxilia a trazar fácilmente su gráfica y a determinar el valor **máximo** o **mínimo** utilizando como fórmula la expresión que resulta al completar el cuadrado.

$f(x)=ax^2+bx+c$	Función dada.
$f(x)=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$	Factorizamos *a* en términos de *x*.
$f(x)=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right)-a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2+c$	Completamos el cuadrado.
$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$	Factorizando y simplificando.

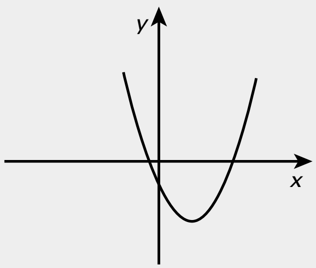
Esta ecuación nos enseña que la parábola tiene un **máximo** o un **mínimo** cuando $h=-\dfrac{b}{2a}$ y $f(x)=k$ según la parábola tenga $a<0$ o $a>0$, respectivamente. Por tanto:

Una parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un valor máximo o mínimo cuando ocurre que

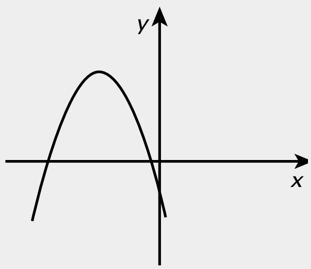
$$x=-\frac{b}{2a}$$

Si $a<0$, entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es un valor máximo.

Si $a>0$, entonces $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ es un valor mínimo.



Mínimo $a>0$



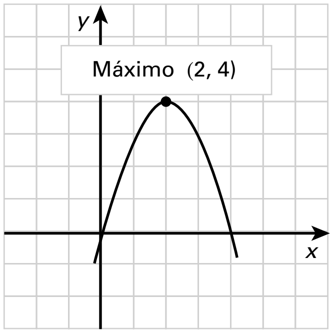
Máximo $a<0$

Ejemplos:

1. Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $f(x) = 4x - x^2$.

Solución:
Si observas con cuidado la función, tenemos que $a = -1$, $b = 4$. Como $a < 0$ la función tiene un valor máximo y está en

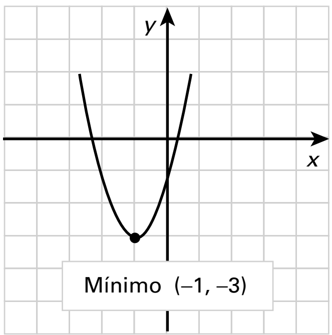
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2 \quad \text{y es} \quad f(2) = 4(2) - (2)^2 = 4$$



2. Determina el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

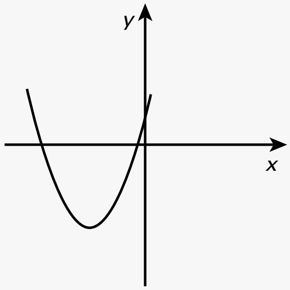
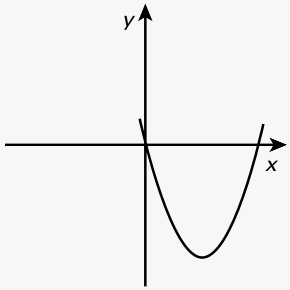
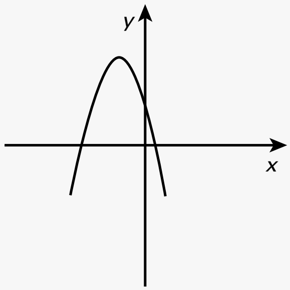
Solución:
Si observas con cuidado la función, tenemos que $a = 2$, $b = 4$. Como $a > 0$ la función tiene un valor mínimo y está en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(2)} = -1 \quad \text{y es} \quad f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -3$$



Evidencias de aprendizaje

Se dan las siguientes funciones cuadráticas y sus gráficas, expresa cada una en su forma estándar y determina el valor máximo o mínimo.

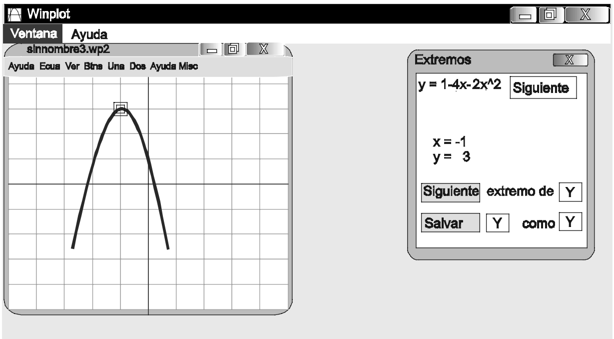
<table>
<tr><td>1. $f(x)=x^2+4x+1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Forma estándar</td><td>Valor máximo o mínimo</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. $g(x)=x^2-4x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Forma estándar</td><td>Valor máximo o mínimo</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3. $h(x)=1-4x-2x^2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Forma estándar</td><td>Valor máximo o mínimo</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Winplot. Sección especial

Para calcular los valores extremos de una función en el programa, sigue esta secuencia que grafica la función $h(x) = 1 - 4x - 2x^2$ del ejemplo anterior.

2 dim → Ecua → $f(x) = 1 - 4x - 2x$^2 → Una → Extremos

Esta es la pantalla final que debes obtener:



Aplicaciones

1. Un ingeniero en matemáticas asesora a un comerciante para determinar un modelo matemático que le proporcione la utilidad $U(x)$ en dólares generada por las ventas de x artículos por semana, y diseña la siguiente fórmula:

$$U(x) = 30x - \frac{1}{5}x^2$$

a) ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para obtener la máxima ganancia?

b) ¿Cuántos artículos debe vender para tener una utilidad de 1,000 dólares?

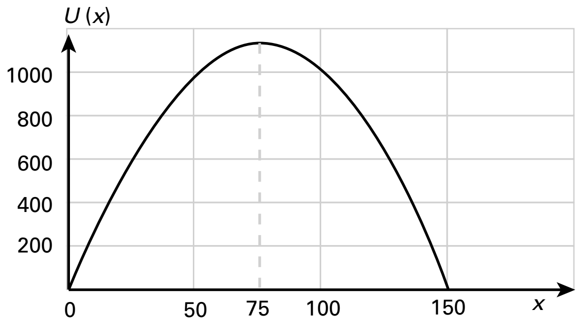
Solución:

a) Esta es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{5}$, y $b = 30$, entonces la utilidad máxima se dará cuando: $x = -\dfrac{30}{2\left(-\frac{1}{5}\right)} = 75$; por lo tanto, la utilidad máxima es $U(75) = 30(75) - \frac{1}{5}(75)^2 = 1125$ dólares.

b) Para saber cuántos artículos deben venderse para tener una utilidad de 1,000 dólares, igualamos a 1,000 la función de utilidad $U(x)$ y resolvemos la ecuación resultante.

$30x - \frac{1}{5}x^2 = 1000$	Igualamos la ecuación a 1,000.
$150x - x^2 - 5000 = 0$	Igualamos a cero y multiplicamos por 5.
$x^2 - 150x + 5000 = 0$	Cambiamos de signo y ordenamos la ecuación.
$(x-100)(x-50) = 0$	Factorizando.

La solución más factible es $x = 50$. La gráfica nos muestra los resultados anteriores.



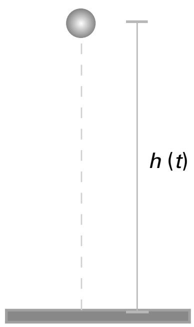
2. Desde el suelo se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 19.6 metros por segundo.

a) ¿Cuánto tiempo utilizó para alcanzar el punto máximo?
b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Solución:

a) Recordemos que en física, la altura que alcanza un proyectil que se lanza hacia arriba viene dada por $h(t) = v_o t - 4.9t^2$ donde v_o es la velocidad inicial, y t es el tiempo. Si sustituimos obtenemos:

$h(t) = 19.6t - 4.9t^2$, entonces $a = -4.9$, y $b = 19.6$, luego la altura máxima ocurre cuando $t = -\dfrac{19.6}{2(-4.9)} = 2$ segundos.

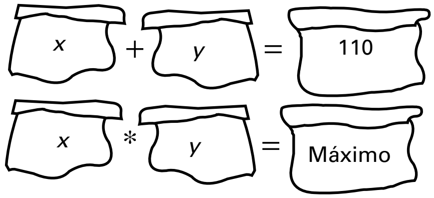


b) La altura máxima es

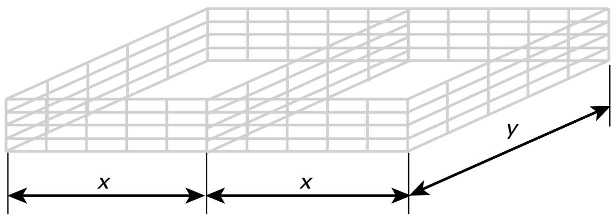
$$h(2) = 19.6(2) - 4.9(2)^2 = 19.6 \text{ metros}$$

Evidencias de aprendizaje

1. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 110 y el producto sea máximo.



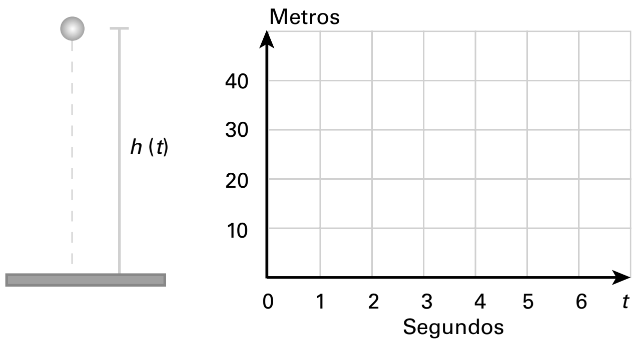
2. Un granjero tiene 600 metros de alambre para cercar dos corrales rectangulares adyacentes. ¿Qué dimensiones del alambrado producirán un máximo de superficie protegida?



3. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 29.4 metros por segundo, su altura (en metros) después de t segundos está dada por

$$h(t) = 29.4t - 4.9t^2$$

¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota? Dibuja una gráfica de la función.



4. Entre todos los rectángulos que tienen perímetro de 60 centímetros, ¿cuál de ellos es el que tiene mayor área?

5. Los costos para producir x artículos diarios para iluminación vienen dados por la función

$$C(x) = 800 - 10x + 0.25x^2$$

en donde $C(x)$ es el costo total en dólares. ¿Cuántos artículos deben producir diariamente para obtener el costo mínimo?

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 3

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• caracterizar las funciones polinomiales en una variable?	
• describir las características algebraicas de las funciones polinomiales de grado cero, uno y dos?	
• definir la influencia de los parámetros de funciones de grados cero, uno y dos en su representación gráfica?	
• definir las funciones polinomiales de grado uno y las particularidades de los modelos lineales?	
• definir las funciones polinomiales de grado dos y las particularidades de los modelos cuadráticos?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• reconocer funciones polinomiales en su forma general y en sus expresiones particulares?	
• distinguir el grado, el coeficiente principal y el término constante de una función polinomial?	
• explicar que las funciones constante, lineal y cuadrática constituyen casos particulares de las funciones polinomiales de grados cero, uno y dos, respectivamente?	
• aplicar modelos lineales y cuadráticos para la resolución de problemas?	

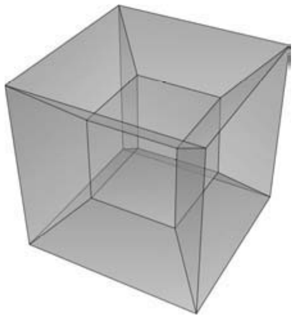
CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.1 El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

BLOQUE 4

Funciones polinomiales II



Hipercubo de cuatro dimensiones proyectado en el espacio tridimensional en una de sus fases. Para apreciar sus dimensiones es necesario verlas en movimiento. Consulta la red.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos polinomiales aplicando las propiedades de las funciones de grados tres y cuatro, para representar y resolver situaciones y problemas teóricos o prácticos, concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos polinomiales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Interpretar tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a las funciones polinomiales.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Caracterizar el comportamiento general de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro.
- Definir la influencia de los parámetros de funciones de grados tres y cuatro en su representación grafica.
- Solucionar ecuaciones factorizables.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Establecer similitudes en el comportamiento de las gráficas de las funciones polinomiales de grado impar (uno y tres), y entre las gráficas de las funciones de grado par (dos y cuatro).
- Bosquejar las gráficas de funciones polinomiales de grados tres y cuatro.
- Determinar las intersecciones con el eje *x* de las gráficas factorizables.
- Aplicar las propiedades de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro en la resolución de problemas.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerará los de otras personas.
- Reconocer sus errores en los procedimientos y mostrará disposición para solucionarlos.
- Actuar de manera propositiva al resolver los ejercicios planeados.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Reconocer el patrón de comportamiento gráfico de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro.
- Describir las propiedades geométricas de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro.
- Utilizar las transformaciones algebraicas y propiedades geométricas para obtener la solución de ecuaciones factorizables y representar gráficamente las funciones polinomiales de grados tres y cuatro.
- Utilizar las propiedades geométricas y algebraicas de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro en la resolución de problemas.

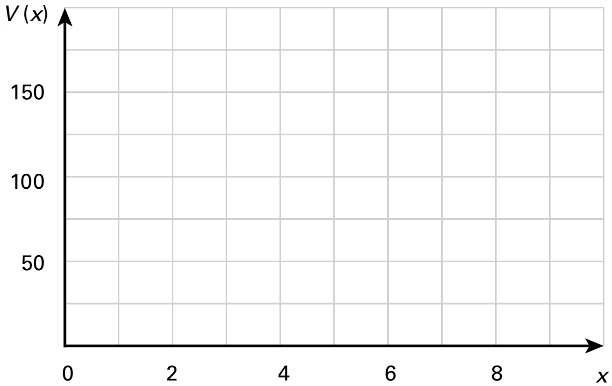
Evidencias de aprendizaje

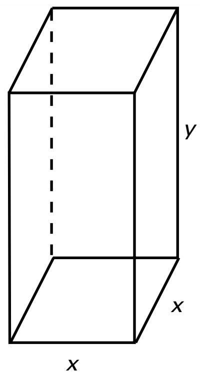
- Caracteriza las gráficas de funciones polinomiales como continuas con trazos suaves.
- Explica que las gráficas de las funciones polinomiales de grado impar crecen en un extremo y decrecen en el otro, mientras que los polinomios de grado par en ambos extremos crecen o decrecen.
- Traza las gráficas de funciones polinomiales de grados tres y cuatro utilizando simetrías, la forma estándar de su ecuación, el signo del coeficiente principal, sus similitudes con las de grados uno o dos y sus posibles intersecciones con el eje x.
- Aplica las propiedades de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro para solucionar problemas teóricos o prácticos, por ejemplo, referentes a volúmenes, crecimientos, etcétera.

Actividad de aprendizaje significativo

Una caja tiene base cuadrada; cada una de las aristas de la base mide x y la altura y centímetros. La longitud total de las aristas de la caja es de 64 centímetros. Con estos datos:

a) Expresa el volumen de la caja como función de x.
b) Traza la gráfica del volumen de la caja en función de x.
c) Escribe el dominio $V(x)$.



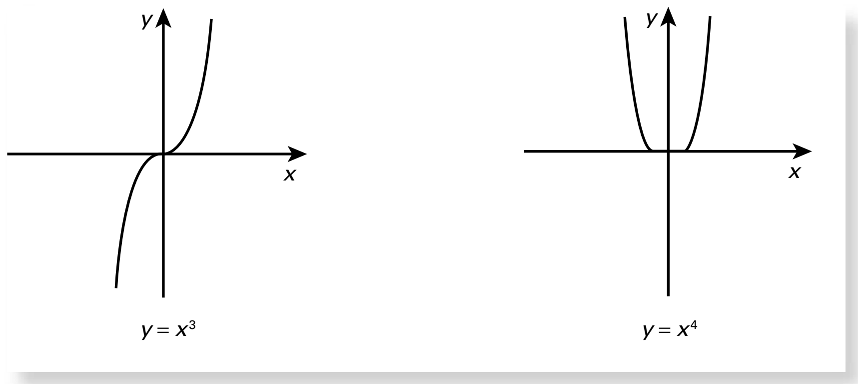


Construye tu conocimiento

- El volumen de la caja es el área de la base por la altura: $V = x^2y$.
- La longitud de sus aristas es $8x + 4y = 64$.
- Despeja y de la expresión del paso anterior y sustitúyela en función del volumen.
- Traza la gráfica para los valores dados y aproxima el mayor volumen de las posibles cajas.

Funciones polinomiales de grados tres y cuatro

Son funciones continuas de grados *impar* y *par*, respectivamente, y sus gráficas y ecuaciones más sencillas son las siguientes:



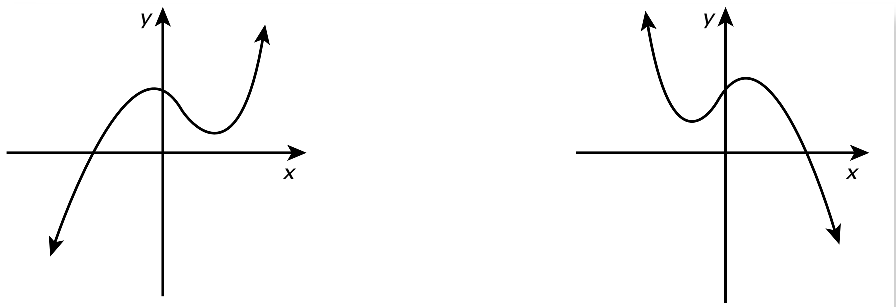
Comportamiento de los polinomios de grados tres y cuatro

Ya habíamos mencionado con anterioridad que cuando el grado de un polinomio es impar los extremos de la curva se alejan en sentido contrario, y que cuando es par se alejan en el mismo sentido; ahora analizaremos con mayor precisión el comportamiento de los polinomios de grados tres y cuatro.

Polinomios de grado tres

El comportamiento final de un polinomio de grado tres $P(x) = a_nx^3 + a_{n-1}x^2 + a_{n-2}x + a_0$ es de la siguiente manera: si el coeficiente principal a_n es positivo y x se hace grande en dirección positiva $P(x)$ también lo hace y si x disminuye en dirección negativa también lo hace $P(x)$. Ahora, si a_n es negativo y x se hace grande en dirección positiva, $P(x)$ disminuye, y si x disminuye en dirección negativa, $P(x)$ crece. El siguiente esquema resume lo anterior.

$$P(x) = a_n x^3 + a_{n-1} x^2 + a_{n-2}\, x + a_0$$

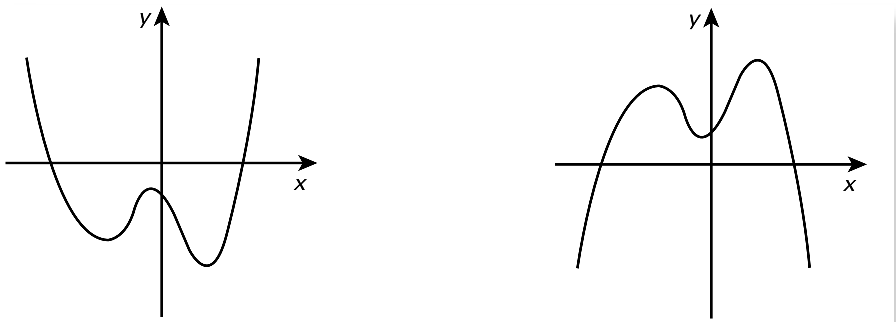


$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} y \to +\infty \text{ cuando } x \to +\infty \\ y \to -\infty \text{ cuando } x \to -\infty \end{cases} \qquad a < 0 \Rightarrow \begin{cases} y \to -\infty \text{ cuando } x \to +\infty \\ y \to +\infty \text{ cuando } x \to -\infty \end{cases}$$

Polinomios de grado cuatro

El comportamiento de un polinomio de grado cuatro $P(x) = a_n x^4 + a_{n-1} x^3 + a_{n-2} x^2 + a_{n-3} x + a_0$ lo resumimos con la siguiente ilustración:

$$P(x) = a_n x^4 + a_{n-1} x^3 + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_0$$



$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} y \to +\infty \text{ cuando } x \to +\infty \\ y \to +\infty \text{ cuando } x \to -\infty \end{cases} \qquad a < 0 \Rightarrow \begin{cases} y \to -\infty \text{ cuando } x \to +\infty \\ y \to -\infty \text{ cuando } x \to -\infty \end{cases}$$

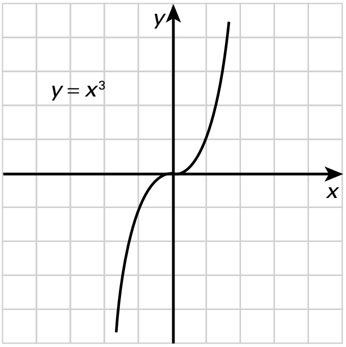
Transformaciones de los monomios de grados tres y cuatro

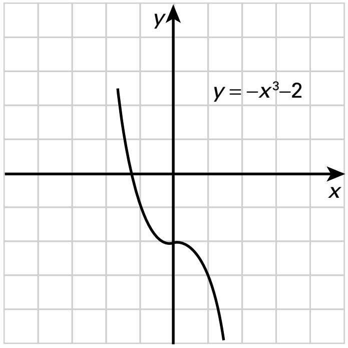
Ejemplos:

1. Traza la gráfica del polinomio $y = -x^3 - 2$.

Solución
Utilizamos la gráfica estándar $y = x^3$ y enseguida la transformamos mediante una reflexión con respecto al eje x y luego desplazamos sus puntos 2 unidades hacia abajo.

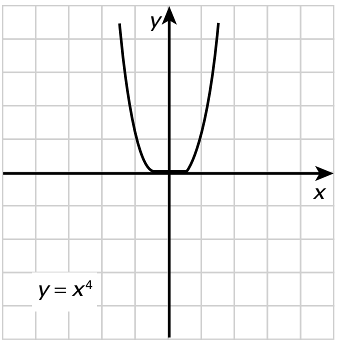
x	$y = x^3$
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8

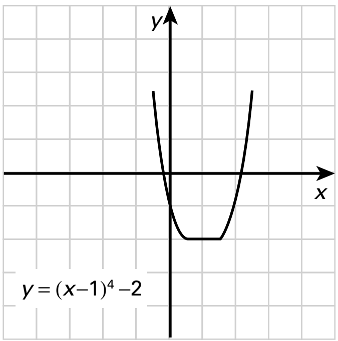




2. Traza la gráfica del polinomio $y = (x - 1)^4 - 2$.

Solución
Utilizamos la gráfica estándar $y = x^4$ y enseguida la transformamos con un desplazamiento horizontal de 1 unidad a la derecha y otro vertical de 2 unidades hacia abajo, como se ve a continuación.





Intersecciones con el eje x (ceros de los polinomios)

Si $P(x)$ es un polinomio y lo evaluamos en c de manera tal que $P(c) = 0$, entonces se dice que c es un cero de $P(x)$, o la intersección con el eje x, o $x = c$ es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$.

Ejemplos:

1. Encuentra la gráfica y las intersecciones con el eje x de la función $P(x) = x^2 (x + 1)(x - 2)$.

Solución

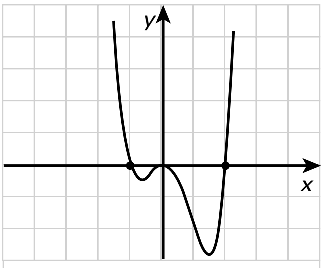
Para encontrar los ceros del polinomio igualamos a cero el polinomio $P(x)$ y resolvemos la ecuación resultante, enseguida elaboramos una tabla de valores del polinomio a la izquierda y a la derecha de los ceros o raíces y trazamos una curva suave sobre los puntos resultantes en la tabla.

$P(x) = x^2 (x + 1)(x - 2)$ Polinomio dado

$x^2(x + 1)(x - 2) = 0$ Igualamos a cero

Las raíces del polinomio ocurren cuando cada uno de sus factores es igual a cero. Es decir, $x^2 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$. Las soluciones de la ecuación son: $x = 0$, $x = -1$, y $x = 2$ y son las intersecciones con el eje x. La intersección con el eje y ocurre cuando $x = 0$, entonces $P(0) = (0)^2(0 + 1)(0 - 2) = 0$. La intersección con y está en $(0, 0)$ como se ve a continuación. Lo mismo ocurre con $P(-1)$ y $P(2)$.

x	$P(x)$
–2	16
–1	0
0	0
1	–2
2	0
3	36



$P(x) = x^2(x+1)(x-2)$

2. Encuentra la gráfica y las intersecciones con el eje x de la función $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

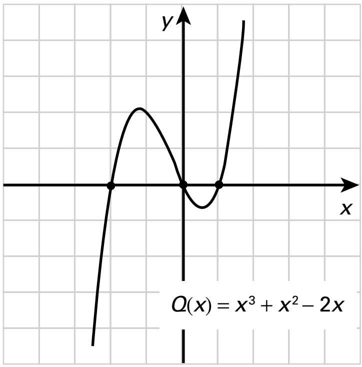
Solución
Para encontrar los ceros del polinomio igualamos a cero y factorizamos el polinomio $Q(x)$, enseguida elaboramos una tabla de valores del polinomio a la izquierda y a la derecha de los ceros o raíces y trazamos una curva suave sobre los puntos resultantes en la tabla.

$Q(x) = x^3 + x^2 - 2x$	Polinomio dado.
$Q(x) = x^3 + x^2 - 2x = 0$	Igualamos a cero $Q(x)$.
$x(x^2 + x - 2) = 0$	Factor común.
$x(x - 1)(x + 2) = 0$	Factorizamos completamente el polinomio.

Esta última igualdad se cumple cuando $x = 0$, $x = 1$, y $x = -2$. Entonces las intersecciones con el eje x son (0, 0), (1, 0) y (–2, 0).

Elaboramos una tabla de valores y trazamos la gráfica:

x	$Q(x)$
–3	–12
–2	0
–1	2
0	0
1	0
2	8
3	30

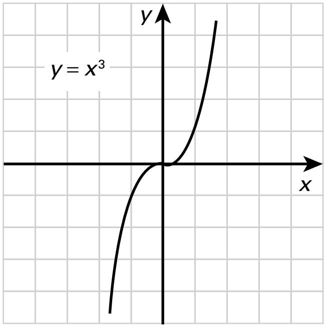


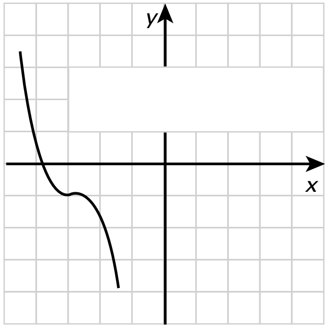
Sugerencias para graficar un polinomio

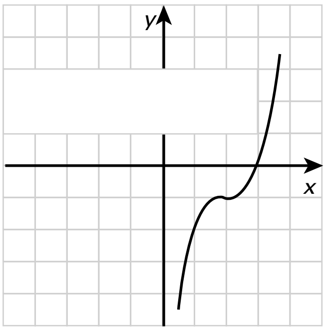
1. Factoriza el polinomio para calcular los ceros del polinomio; aquí estás encontrando las intersecciones con el eje x.
2. Elabora una tabla de valores del polinomio, evaluando la función para valores de x, a la izquierda y derecha de los ceros determinados en el paso anterior; no olvides determinar la intersección con el eje y.
3. Grafica las intersecciones y los puntos encontrados en la tabla.
4. Determina el comportamiento final del polinomio.
5. Traza una curva suave sobre los puntos del paso 3.

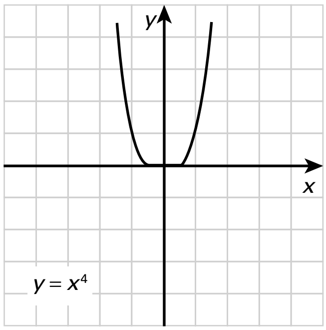
Evidencias de aprendizaje

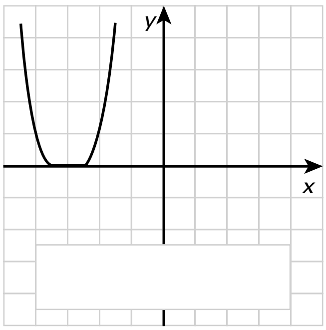
1. Dada la función estándar y la gráfica de algunas transformaciones de ésta, escribe en el espacio en blanco de cada ilustración la expresión algebraica de cada función.

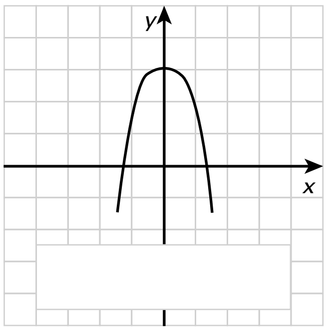






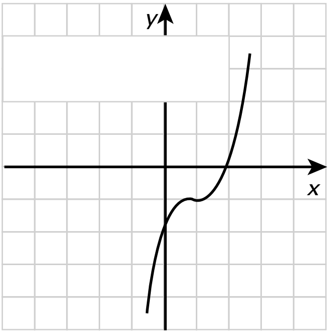


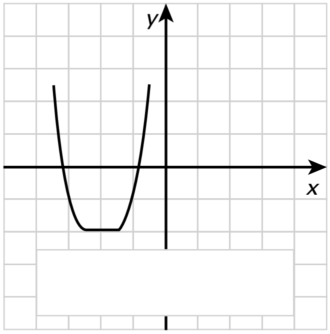


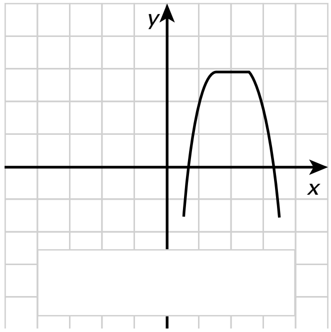


2. Dadas las siguientes funciones escribe la ecuación que le corresponde a cada gráfica.

a) $y = -(x - 2)^4 + 3$, *b*) $y = (x - 1)^3 - 1$, *c*) $y = (x + 2)^4 - 2$

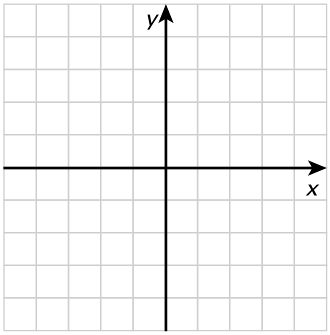


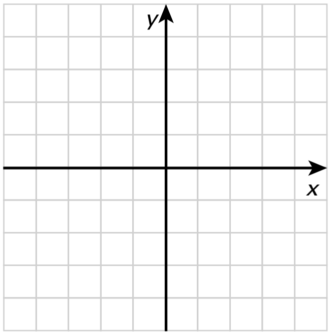


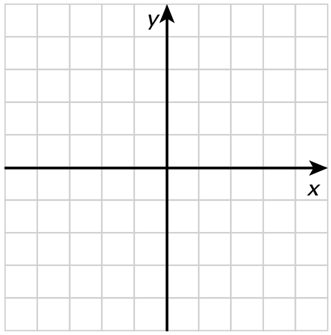


3. Traza la gráfica de la función dada y describe su comportamiento. (Observa que puedes obtener fácilmente los ceros o intersecciones con el eje x).

a) $y = (x + 1)(x - 1)(x + 2)$, *b*) $y = x(x - 2)(x + 1)$, *c*) $y = x(x + 2)(x - 1)^2$

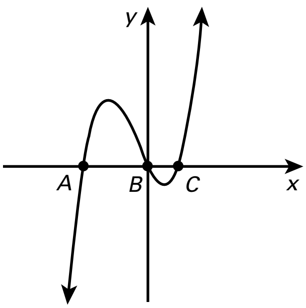






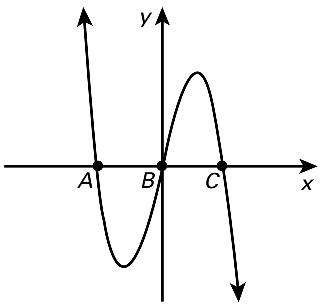
4. Factoriza y encuentra los ceros de los siguientes polinomios y describe su comportamiento.

a) $y = x^3 + x^2 - 2x$,



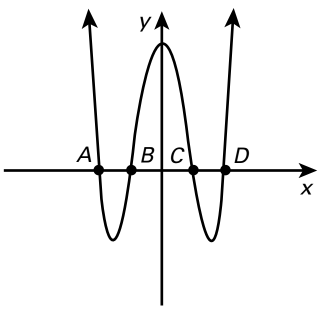
A( ) *B*( )
C( )

b) $y = -x(x^2 - 4)$,



A( ) *B*( )
C( )

c) $y = x^4 - 5x^2 + 4$

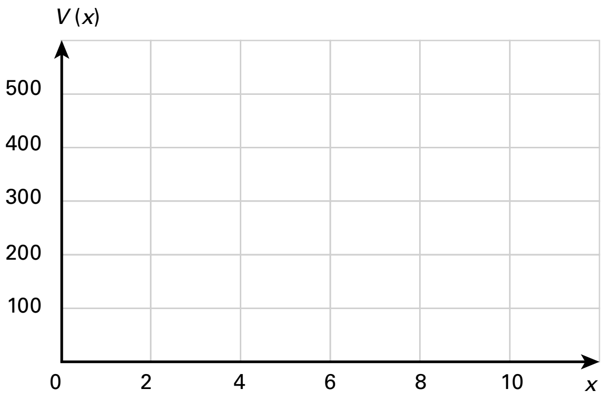


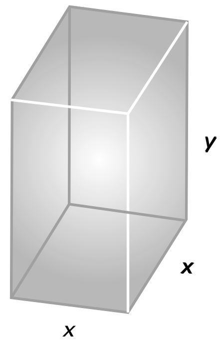
A( ) *B*( )
C( ) *D*( )

Aplicaciones

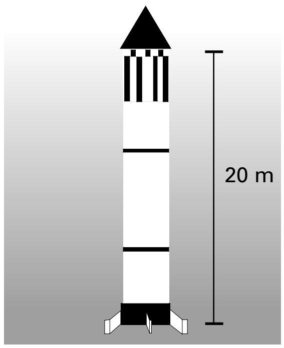
5. Una caja de cartón tiene la base cuadrada y cada una de las cuatro aristas de la base tiene una longitud de x centímetros, como se muestra en la figura. La suma de todas las aristas de la caja es de 96 centímetros.

a) Expresa el volumen V de la caja como una función de x.
b) Traza la grafica de la función $V(x)$.

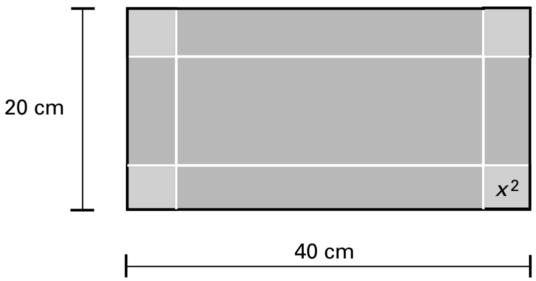


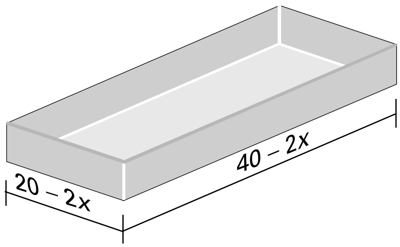


6. Un cohete está formado por un cilindro recto circular de 20 metros de altura, coronado por un cono cuya altura y diámetro son iguales, y cuyo radio x es el mismo que el del cilindro. Expresa el volumen $V(x)$ del cohete como función del radio. El volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$ y el de un cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



7. Se desea construir una caja abierta a partir de un pedazo de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados iguales de lado *x* en cada esquina y doblando los costados. Determina el volumen de la caja en función de *x*.





AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 4

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• caracterizar el comportamiento general de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro?	
• definir la influencia de los parámetros de funciones de grados tres y cuatro en su representación gráfica?	
• solucionar ecuaciones factorizables?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• establecer similitudes en el comportamiento de las gráficas de las funciones polinomiales de grado impar (uno y tres), y entre las gráficas de las funciones de grado par (dos y cuatro)?	
• bosquejar las gráficas de funciones polinomiales de grados tres y cuatro?	
• determinar las intersecciones con el eje *x* de las gráficas factorizables?	
• aplicar las propiedades de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro en la resolución de problemas?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.4. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

BLOQUE 5

Funciones polinomiales III

Las *galaxias* son agrupaciones de miles de millones de estrellas. Estrellas, gas y polvo interestelar orbitan alrededor del centro de la galaxia debido a la gravitación de las demás estrellas.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos polinomiales aplicando las propiedades de los ceros de las funciones, para representar situaciones y problemas teóricos o prácticos, concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos polinomiales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Interpretar tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a las funciones polinomiales factorizables.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Obtener el residuo de la división de un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$ valiéndose del teorema del residuo.
- Identificar si un binomio de la forma $x - a$ es factor de un polinomio, valiéndose del teorema del factor.
- Comprender el proceso de la división sintética para un polinomio y un binomio de la forma $x - a$.
- Describir la prueba del cero racional y definir los teoremas fundamentales del álgebra y de la factorización lineal.
- Reconocer los ceros reales y complejos de funciones polinomiales factorizables.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Determinar si un binomio de la forma $x - a$, es factor de un polinomio, sin necesidad de efectuar la división.
- Obtener en forma abreviada el cociente y el residuo de la división de un polinomio entre un binomio $x - a$.
- Obtener los ceros y las gráficas de funciones polinomiales factorizables.
- Explicar la prueba del cero racional, el teorema fundamental del álgebra y el teorema de la factorización lineal.
- Aplicar las propiedades de las funciones polinomiales en la resolución de problemas.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerará los de otras personas.
- Reconocer sus errores en los procedimientos y mostrará disposición para solucionarlos.
- Actuar de manera propositiva al resolver los ejercicios planeados.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Utilizar consecutivamente los teoremas del factor y del residuo y la división sintética, para hallar los ceros reales de las funciones polinomiales.
- Emplear la división sintética para obtener en forma abreviada el cociente y el residuo de la división de un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$.

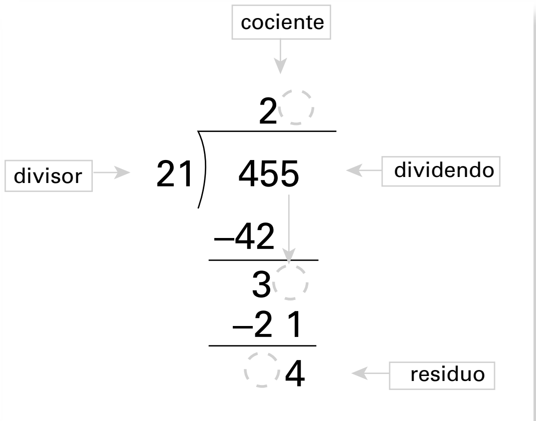
- Emplear la prueba del cero racional, el teorema fundamental del álgebra y el teorema de la factorización lineal, para hallar los ceros de una función polinomial factorizable.
- Aplicar y combinar las técnicas y procedimientos para la factorización y la obtención algebraica y gráfica de ceros de funciones polinomiales, en la resolución de problemas teóricos o prácticos.

Evidencias de aprendizaje

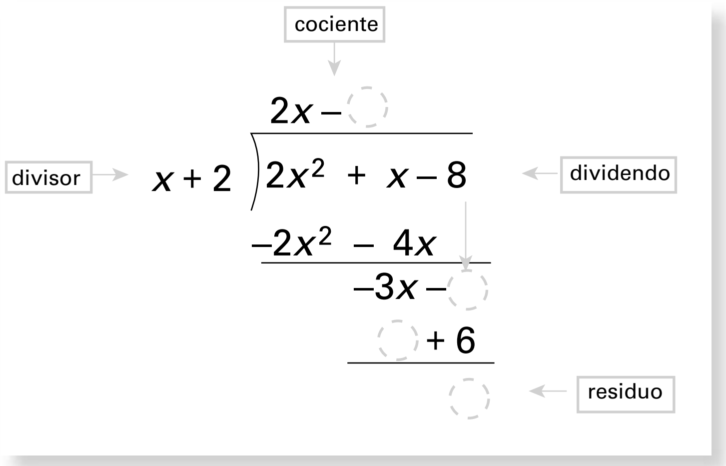
- Aplica el teorema del residuo para hallar el cociente de la división de un polinomio y un binomio de la forma $x - a$, sin efectuar ésta.
- Aplica el teorema del factor y determina si $x - a$ es factor o no del polinomio dado.
- Al efectuar la división sintética, ordena los polinomios, agrega los coeficientes cero necesarios, identifica el cociente y el residuo y escribe el resultado como polinomio.
- Utiliza el teorema del factor, el teorema del residuo, la división sintética, la prueba del cero racional, el teorema fundamental del álgebra y el teorema de la factorización lineal, como herramientas de investigación de ceros y de transformación de funciones polinomiales que modelan y solucionan diversas situaciones reales o hipotéticas.

Actividades de aprendizaje significativo

1. Recuerda el procedimiento largo de la división con números y completa la siguiente división escribiendo en los círculos en blanco el número que falta. El resultado de la operación es, $21+\frac{14}{21}$ o bien (21)(21) + 14 = 455.



2. El procedimiento largo para dividir polinomios es muy parecido a la división larga con números. Procede de la misma manera que en la actividad anterior para encontrar el resultado de dividir $2x^2 + x - 8$ entre $x + 2$.



Secuencia para realizar la división anterior

1. Ordena los polinomios.
2. Divide $2x^2$ entre x y el resultado es $2x$.
3. Multiplica el divisor $x + 2$ por $2x$.
4. Resta y baja -8.
5. Divide $-3x$ entre x para obtener -3.
6. Multiplica el divisor $x + 2$ por -3.
7. Resta.

La división termina cuando el último renglón tiene una expresión de menor grado que el divisor.

El resultado de la división se puede escribir como sigue:

$$\frac{2x^2 + x - 8}{x + 2} = 2x - 3 - \frac{2}{x + 2}$$

o si multiplicamos la igualdad por $(x - 2)$

$$2x^2 + x - 8 = (2x - 3)(x + 2) - 2$$

Autoevaluación

Determina el cociente y el residuo de las siguientes divisiones expresando el resultado de dos formas diferentes.

División	Resultado 1	Resultado 2
1. $\dfrac{x^2+8x-2}{x+3}$		
2. $\dfrac{x^3+8x-2}{x+5}$		
3. $\dfrac{x^3+6x+2}{x^2+3}$		
4. $\dfrac{x^3+6x+2}{x-1}$		

La división larga de los polinomios anteriores se puede resumir con el siguiente teorema.

Algoritmo de la división

Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre otro polinomio $d(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que $P(x)$ puede expresarse como

$$\underbrace{P(x)}_{\text{dividendo}} = \underbrace{d(x)}_{\text{divisor}}\underbrace{q(x)}_{\text{cociente}} + \underbrace{r(x)}_{\text{residuo}}$$

donde $r(x)$ puede ser cero o de un grado menor que el de $d(x)$.

Teorema del residuo y del factor

Teorema del residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $r = P(c)$.

Para probar el teorema anterior dividimos $P(x)$ entre $x - c$, donde c es un número real, entonces la división la podemos expresar como

$$\frac{P(x)}{x-c} = q(x) + \frac{r}{x-c} \qquad \text{o bien} \qquad P(x) = q(x)(x - c) + r$$

donde r es una constante. Si hacemos $x = c$ tenemos que

$$P(c) = q(c)(c - c) + r$$

$$P(c) = q(c)(0) + r$$

$$P(c) = r.$$

Ejemplos:

1. Usando el teorema del residuo evalúa la función $P(x) = 2x^2 + x - 8$ en $x = -2$.

Solución

$$P(-2) = 2(-2)^2 + (-2) - 8 = -2$$

Lo que nos dice este resultado es que si dividimos $2x^2 + x - 8$ entre $x + 2$ el residuo es -2. Esto se puede probar realizando la división.

2. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x - 6$, determina el residuo en $x = 2$ y comprueba el resultado con la división de $P(x)$ entre $x - 2$.

Solución

$P(2) = (2)^3 + 3(2)^2 - 7(2) - 6 = 0$ Evaluando el polinomio en $x = 2$.

Si hacemos la división probamos que el residuo es cero, esto significa que $x - 2$ es un factor del polinomio y que $x = 2$ es un cero de éste.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 5x + 3 \\ \hline
x - 2 & x^3 + 3x^2 - 7x - 6 \\
 & -x^3 + 2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad 5x^2 - 7x - 6 \\
 & \quad -5x^2 + 10x \\ \cline{2-2}
 & \qquad 3x - 6 \\
 & \qquad -3x + 6 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Lo que nos enseña la división anterior es, si $P(c) = 0$ entonces por el teorema del residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot q(x) + 0 = (x - c) \cdot q(x)$$

y por tanto $x - c$ es un factor de $P(x)$. Con esto, hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema del factor

Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $(x - c)$, si y sólo si $P(c) = 0$.

Ejemplos:

1. Factorización de un polinomio. Si $P(x) = x^3 - 28x - 48$, demuestra que $P(-4) = 0$, y utiliza este hecho para factorizar el polinomio.

Solución

Evaluando $P(x)$ en $x = -4$ se ve fácilmente que $P(-4) = 0$:

$$P(-4) = (-4)^3 - 28(-4) - 48 = 0$$

Utilizando la división de polinomios tenemos que (observa la división al margen):

$$\frac{x^3 - 28x - 48}{x + 4} = x^2 - 4x - 12$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 4x - 12 \\ \hline x + 4 & x^3 + 0x^2 - 28x - 48 \\ & -x^3 - 4x^2 \\ \hline & -4x^2 - 28x - 48 \\ & 4x^2 + 16x \\ \hline & -12x - 48 \\ & 12x + 48 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Por tanto, la factorización del polinomio es:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 4)(x^2 - 4x - 12) \\ &= (x + 4)(x + 2)(x - 6) \end{aligned}$$

Recuerda: que para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se buscan dos números m y n que sumen b y multiplicados den c.

$$m + n = b \text{ y } mn = c$$

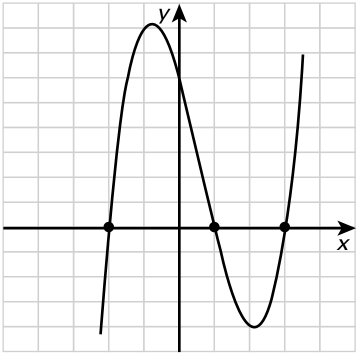
$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

2. **Encontrar un polinomio con ceros específicos.** Obtén un polinomio de grado 3 que tenga como ceros –2, 1 y 3.

Solución
De acuerdo al teorema del factor, $x = -2$, $x = 1$ y $x = 3$, son soluciones del polinomio, por tanto $(x + 2)$, $(x - 1)$ y $(x - 3)$ son factores de éste, por lo que el polinomio buscado es

$$P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Observa los ceros en la gráfica.



Evidencias de aprendizaje

1. Realiza las siguientes divisiones por el método largo y comprueba el residuo con el teorema del mismo nombre.

División	Residuo
a) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x - 2} =$	$P(2) =$
b) $\dfrac{4x^2 - 12x + 5}{x - 1} =$	$P(1) =$
c) $\dfrac{3x^3 - 12x^2 + 3x + 1}{x + 3} =$	$P(-3) =$

División	Residuo
d) $\dfrac{2x^4-4x^3+3x-5}{x+1}=$	$P(-1)=$
e) $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+2x-1}{x+2}=$	$P(-2)=$

2. Dado un polinomio $P(x)$, demuestra que $P(x)=0$ para el valor de x propuesto y emplea este hecho para factorizar completamente el polinomio.

Polinomio	Factorización de $P(x)$
a) $P(x)=x^3-7x-6$ para $x=3$	$P(x)=$
b) $P(x)=2x^3+3x^2-11x-6$ para $x=-3$	$P(x)=$
c) $P(x)=x^3-x^2-9x+9$ para $x=1$	$P(x)=$
d) $P(x)=x^3-28x-48$ para $x=-4$	$P(x)=$
e) $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ para $x=2$	$P(x)=$

3. Determina un polinomio $P(x)$, del grado indicado que tenga los ceros dados.

Polinomio	Factorización de $P(x)$
a) Grado 3; ceros $-3, -1, 1$	$P(x)=$
b) Grado 4; ceros $-1, 0, 1, 3$	$P(x)=$
c) Grado 3; ceros $-2, 0, 3$	$P(x)=$
d) Grado 4; ceros $-3, -1, 0, 2$	$P(x)=$

División sintética

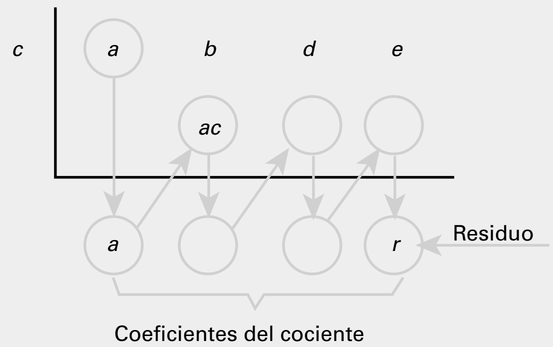
La división sintética es un método abreviado de la división de polinomios, pero únicamente puede utilizarse cuando se tienen divisores de la forma $x-c$. Este método es de gran ayuda para encontrar los factores de un polinomio. A continuación te presentamos un ejemplo para un polinomio de grado 3, pero la técnica se puede aplicar también a expresiones de grado 4 o mayores.

División sintética

La siguiente técnica nos dice cómo dividir $ax^3 + bx^2 + dx + e$, entre $x - c$.

Flecha vertical: Indica que los términos se suman.

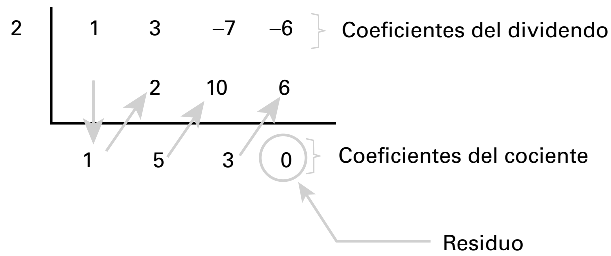
Flecha horizontal: Indica que los términos se multiplican por c.



Ejemplos:

1. Vamos a dividir $x^3 + 3x^2 - 7x - 6$ entre $x - 2$, uno de los ejemplos que resolvimos por el método largo.

Solución
Aquí el divisor $x - c = x - 2$, esto quiere decir que $c = 2$.



Por lo tanto, tenemos;

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 7x - 6}{x - 2} = x^2 + 5x + 3$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

2. Dividir $x^3 + 2x^2 - 5$ entre $x + 3$.

Solución

Aquí el divisor $x - c = x + 3$, esto quiere decir que $c = -3$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-3 & 1 & 2 & 0 & -5 \\
 & & -3 & 3 & -9 \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & -14
\end{array}
$$

Por lo tanto, tenemos;

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 0x - 5}{x + 3} = x^2 - x + 3 - \frac{14}{x + 3}$$

Evidencias de aprendizaje

En las siguientes propuestas utiliza la división sintética para determinar el cociente y haz uso del teorema respectivo para probar el residuo de las divisiones.

División	Resultado
1. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ entre $x - 2$	
2. $x^3 - 8x + 2$ entre $x + 3$	

(*Continúa*)

(*Continuación*)

3. $x^4 - x^3 + 2x^2 - x$ entre $x - 2$	
4. $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 1$ entre $x + 2$	

Prueba del cero racional de los polinomios

El teorema del factor nos dice que determinar los ceros de un polinomio en realidad es lo mismo que factorizarlo.

Para utilizar el siguiente teorema consideremos el polinomio

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x+3) \qquad \text{Forma factorizada}$$
$$= x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \qquad \text{Forma expandida}$$

En la forma factorizada se pueden identificar fácilmente que los ceros del polinomio están en –3, –1 y en 2. En la forma desarrollada, el coeficiente constante –6 se obtiene al multiplicar (–2)(1)(3). Esto quiere decir que los ceros del polinomio son factores del término constante. El siguiente teorema resume la observación anterior.

Teorema de los ceros racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de $P(x)$ es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0
y q es un factor del coeficiente principal a_n

Ejemplos:

1. Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

Solución

Identificamos que $\frac{p}{q}$ es de la forma $\frac{\text{factores de } 8}{\text{factores de } 1} = \frac{\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4 \pm 8}{\pm 1,}$.

Simplificando las fracciones y omitiendo las repeticiones, los posibles valores de $\frac{p}{q}$ son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4, \quad \pm 8$$

Enseguida verificamos cuáles de esos posibles ceros lo son realmente, probando con uno y otro hasta que $P(x) = 0$.

$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 6(-1) + 8 = 10$ $\quad x = -1$ $\quad$ no es cero de $P(x)$.

$P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 6(1) + 8 = 0$ $\quad x = 1$ $\quad$ sí es cero de $P(x)$.

Como 1 sí es cero de $P(x)$, concluimos que $x - 1$ es un factor del polinomio. Ahora utilicemos la división sintética para factorizar el polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

Como el polinomio es de grado 3 y ya tenemos un factor, $x - 1$, podemos factorizar totalmente el polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \\ &= (x-1)(x^2 - 2x - 8) \\ &= (x-1)(x+2)(x-4) \end{aligned}$$

Las soluciones o ceros del polinomio son $x = -2$, $x = 1$ y $x = 4$.

2. Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$.

Solución
Identificamos que $\frac{p}{q}$ es de la forma

$$\frac{\text{factores de } 6}{\text{factores de } 2} = \frac{\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6}{\pm 1, \quad \pm 2}$$

Simplificando las fracciones y omitiendo las repeticiones, los posibles valores de $\frac{p}{q}$ son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}$$

Enseguida verificamos cuáles de esos posibles ceros lo son realmente, probando con uno y otro hasta que $P(x) = 0$.

$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 - (-1) - 6 = -2$ $\quad x = -1$ $\quad$ no es cero de $P(x)$.

$P(1) = 2(1)^3 + 5(1)^2 - (1) - 6 = 0$ $\quad x = 1$ $\quad$ sí es cero de $P(x)$.

Como 1 sí es cero de $P(x)$, concluimos que $x - 1$ es un factor del polinomio. Ahora utilicemos la división sintética para factorizar el polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 5 & -1 & -6 \\ & & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

Ahora obtenemos fácilmente la factorización parcial del polinomio:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + 5x^2 - x - 6 \\ &= (x-1)(2x^2 + 7x + 6) \\ &= (x-1)(2x^2 + 7x + 6) \end{aligned}$$

Como no se ven de manera directa los factores de $2x^2 + 7x + 6$ utilizaremos la fórmula cuadrática para obtener los ceros restantes

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(2)(6)}}{2(2)} = \frac{-7 \pm 1}{4}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-7+1}{4} = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7-1}{4} = -2 \end{cases}$$

Las soluciones o ceros del polinomio son $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$. Luego su factorización es:

$$P(x) = (x-1)(2x+3)(x+2)$$

Determinación de los ceros racionales

1. Haz una lista de todos los posibles ceros utilizando el teorema de los ceros racionales.
2. Utiliza la división sintética para evaluar el polinomio en cada uno de los candidatos a ceros racionales determinados en el paso 1. Cuando el residuo sea 0, anota el cociente respectivo.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para el cociente. Detener el proceso cuando llegues a un cociente cuadrático o que se pueda factorizar fácilmente.

Evidencias de aprendizaje

En los siguientes polinomios escribe todos los candidatos a ceros racionales aplicando el teorema del mismo nombre y después factoriza totalmente los polinomios.

Polinomio	Posibles ceros	Factorización
1. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$		
2. $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$		
3. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$		
4. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$		
5. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$		

Números complejos

En el estudio del álgebra es frecuente encontrarse con ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + 1 = 0$, las cuales no tienen solución en el campo de los números reales, porque no hay un número real x que pueda elevarse al cuadrado y producir -1. Para salvar esta deficiencia, los matemáticos han creado un sistema expandido, mediante lo que se llama **unidad imaginaria *i***, que se define como

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{o bien} \qquad i^2 = -1$$

Cuando se combinan números reales con múltiplos reales de esta unidad imaginaria i, obtenemos el conjunto de **números complejos**. Cada número complejo puede escribirse en la **forma estándar**, $a + bi$. La **parte real** de este número es a y la **parte imaginaria** es b.

Números complejos

Para números reales a y b, el número

$$a + bi$$

Es un **número complejo**. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces el número complejo bi es un **número imaginario**.

Ejemplos:

1. Los siguientes son ejemplos de números complejos

Número complejo	Parte real	Parte imaginaria
$5 + 3i$	5	$3i$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}i$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}i$
5	5	0
$3i$	0	$3i$

2. La solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 4 = 0$ es:

$$x^2 + 4 = 0$$

$x^2 = -4$ Trasponiendo términos.

$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$ Despejando x y simplificando.

$$x = \pm 2i$$

3. La solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 4 = 0$ con la fórmula general es:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Observa la simplificación de $\sqrt{-12}$.

$$\sqrt{-12} = \sqrt{4(-3)} = 2\sqrt{3}\ i$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{-3}}{2}$$

$$= -1 \pm i\sqrt{3}$$

Esta solución significa que las raíces de la ecuación están en: $x = -1 + i\sqrt{3}$ y $x = -1 - i\sqrt{3}$

Teorema fundamental del álgebra y factorización lineal

En apartados anteriores vimos que un polinomio de grado n puede tener máximo n ceros reales. En esta sección vamos a estudiar que, en el sistema de los números complejos, cada función polinomial de grado n tiene precisamente n ceros. Este resultado se deriva del **teorema fundamental del álgebra**, demostrado por el famoso matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855).

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $P(x)$ de grado n, donde $n > 0$ tiene al menos un cero en el sistema de números complejos.

Usando este teorema y la equivalencia de los ceros y factores, se puede enunciar también el siguiente teorema.

Teorema de factorización lineal

Todo polinomio $P(x)$ de grado n, donde $n > 0$ tiene precisamente n factores lineales:

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos y a es el coeficiente principal de $P(x)$.

Observa que ninguno de los teoremas anteriores explican cómo encontrar los *ceros o factores* de un polinomio; para tal propósito nos hemos de apoyar en las técnicas desarrolladas con anterioridad.

El **teorema de factorización lineal** indica que un polinomio de grado n tiene precisamente n ceros, y que éstos pueden ser reales y complejos.

Ejemplos:

1. Ceros de funciones polinomiales

a) La función de primer grado

$$f(x) = x - 2$$

tiene exactamente un cero: $x = 2$.

b) La función de segundo grado

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

tiene exactamente dos ceros: $x = -1$ y $x = 3$.

c) La función de grado tres

$$f(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

tiene exactamente tres ceros: $x = 0$, $x = -2i$ y $x = 2i$.

d) La función de cuarto grado

$$f(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x + i)(x - i)$$

tiene exactamente cuatro ceros: $x = -1$, $x = 1$, $x = -i$ y $x = i$.

2. Obtener los cuatro ceros del polinomio

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4.$$

Solución
Utilizando el teorema de los ceros racionales, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales:

$$\frac{p}{q} = \frac{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4}{\pm 1,\ \pm 3} = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3}$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Con estos resultados y utilizando la división sintética, determinamos que $x = 2$ y $x = -\frac{1}{3}$ son ceros del polinomio, obteniendo la siguiente factorización.

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$$

$$= (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2)$$

Primera división con residuo cero.

$$= (x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2+3x+6)$$

Segunda división con residuo cero.

Los ceros del factor cuadrático son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(3)(6)}}{2(3)} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{-7}}{6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}.$$

Por tanto, los cuatro factores del polinomio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$ son:

$$x = 2,\ x = -\frac{1}{3},\ x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i,\ x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Evidencias de aprendizaje

1. Dado un número complejo escribe la parte real y la parte imaginaria.

Número complejo	Parte real	Parte imaginaria
$7 + 2i$		
$4 - \frac{3}{5}i$		
23		
$5i$		

2. Determina la factorización completa del polinomio.

Ecuación	Factorización
1. $P(x) = x^2 + 9$	$P(x) =$
2. $P(x) = x^4 - 16$	$P(x) =$
3. $P(x) = x^4 - x^2 - 6$	$P(x) =$
4. $P(x) = x^3 + 8$	$P(x) =$
5. $P(x) = x^3 - x - 6$	$P(x) =$
6. $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1$	$P(x) =$
7. $P(x) = x^3 - 27$	$P(x) =$
8. $P(x) = 2x^4 - 7x^2 - 4$	$P(x) =$
9. $P(x) = x^4 + 4$	$P(x) =$
10. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$	$P(x) =$

3. Determina todas las soluciones de las ecuaciones.

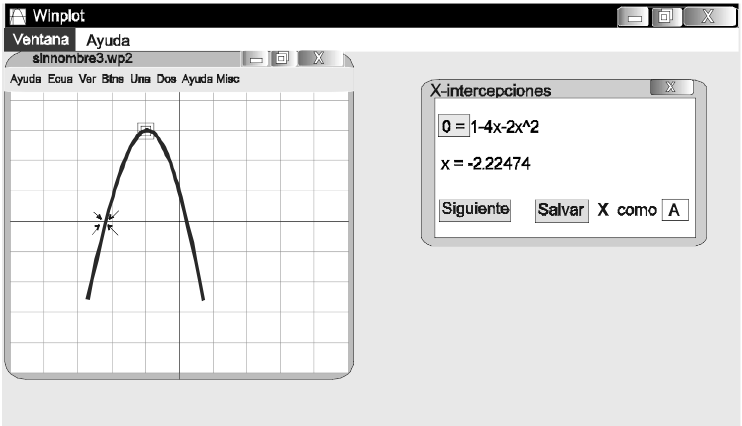
Ecuación	Soluciones
1. $x^2 + 9 = 0$	
2. $x^2 + 2x + 2 = 0$	
3. $4x^2 + 9 = 0$	
4. $2x^2 + 2x + 1 = 0$	
5. $x^4 - 1 = 0$	
6. $x^3 - 8 = 0$	
7. $x^3 + 8 = 0$	
8. $x^4 - 16 = 0$	
9. $x^4 + 4 = 0$	
10. $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$	

Winplot. Sección especial

Por ejemplo, para calcular los ceros de la función $h(x) = 1 - 4x - 2x^2$ en el programa, sigue esta secuencia.

2 dim → Ecua → $f(x) = 1 - 4x - 2x$^2 → Una → Ceros

Esta es la pantalla final que debes obtener.



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 5

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• obtener el residuo de la división de un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$ valiéndose del teorema del residuo?	
• identificar si un binomio de la forma $x - a$, es factor de un polinomio, valiéndose del teorema del factor?	
• comprender el proceso de la división sintética para un polinomio y un binomio de la forma $x - a$?	
• describir la prueba del cero racional y definir los teoremas fundamentales del álgebra y de la factorización lineal?	
• reconocer los ceros reales y complejos de funciones polinomiales factorizables?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• determinar si un binomio de la forma $x - a$, es factor de un polinomio, sin necesidad de efectuar la división?	
• obtener en forma abreviada el cociente y el residuo de la división de un polinomio entre un binomio $x - a$?	
• obtener los ceros y las gráficas de funciones polinomiales factorizables?	
• explicar la prueba del cero racional, el teorema fundamental del álgebra y el teorema de la factorización lineal?	
• aplicar las propiedades de las funciones polinomiales en la resolución de problemas?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.4. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

BLOQUE

6 Funciones racionales

La *contaminación* marina provocada por la actividad humana, está causando un impresionante número de zonas muertas en los océanos donde el oxígeno disuelto en el agua disminuye de manera escalofriante a niveles incapaces de sostener la vida marina.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos con funciones racionales, aplicando razones entre funciones racionales para representar situaciones y problemas teóricos o prácticos, concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos racionales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Interpretar tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a las funciones racionales.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Definir los componentes polinomiales de una función racional.
- Identificar las posibles asíntotas de funciones racionales, horizontales, verticales u oblicuas.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Expresar una función racional mediante polinomios que carecen de factores comunes.
- Determinar el dominio de definición de una función racional.
- Determinar si una función racional posee asíntotas horizontales, verticales u oblicuas y obtener éstas en caso afirmativo.
- Elaborar la gráfica de una función racional auxiliándose, cuando existen las asíntotas.
- Aplicar las funciones racionales en la resolución de problemas.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerar los de otras personas.
- Reconocer sus errores en los procedimientos y mostrar disposición para solucionarlos.
- Actuar de manera propositiva al resolver los ejercicios planeados.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.
- Asumir una postura constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta, dentro de distintos equipos de trabajo.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Identificar el dominio de definición de las funciones racionales y determinar la existencia de asíntotas verticales.
- Emplear la calculadora para tabular valores de funciones racionales.

- Aplicar los criterios para determinar la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas y utilizar éstas para dibujar la gráfica de una función racional.
- Aplicar las propiedades de las funciones racionales y su relación con rectas que son asíntotas, para solucionar problemas teóricos o prácticos.

Evidencias de aprendizaje

- Explica el significado de asíntota.
- Escribe el dominio de definición de la función racional y obtiene las ecuaciones de las asíntotas verticales a partir de los valores que hacen cero el denominador.
- Tabula valores alrededor de los ceros del denominador para conocer el comportamiento de las asíntotas verticales, a la derecha e izquierda del origen para detectar asíntotas horizontales.
- Compara los grados de los polinomios componentes y emplea el algoritmo de la división para hallar asíntotas horizontales y oblicuas.
- Emplea las asíntotas para graficar funciones racionales.
- Utiliza asíntotas, tablas y graficas al solucionar problemas teóricos o prácticos modelados con funciones racionales.

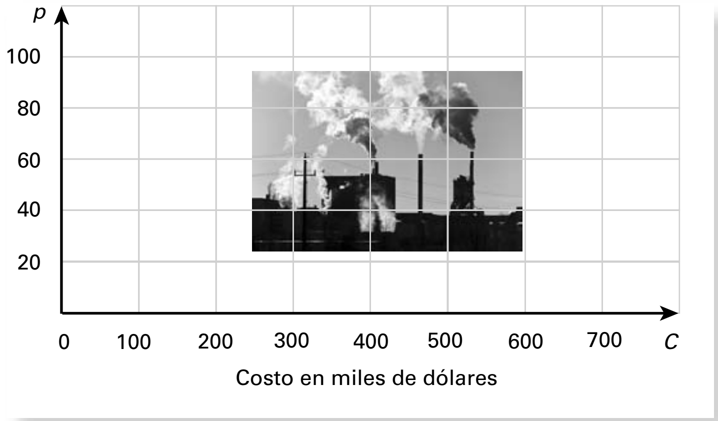
Actividades de aprendizaje significativo

1. Costo del agua limpia. El costo C —en miles de dólares— de eliminar el p por ciento de contaminantes industriales que arroja una fábrica en un río está dado por la ecuación

$$C = \frac{80{,}000p}{100 - p}, \qquad \text{para} \qquad 0 \leq p < 100$$

a) Con la función anterior completa la tabla dada a continuación y traza la gráfica correspondiente.
b) Halla el costo de combatir un 95% de la contaminación.
c) ¿Es factible para la sociedad combatir el 100% de la contaminación?

p	0	20	40	60	80	90	100
$C(p)$							



Actividad de investigación

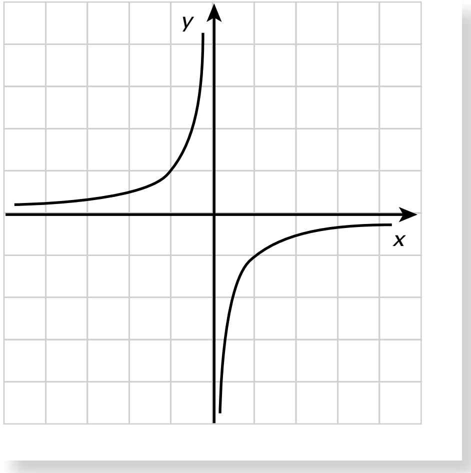
- Haz una breve reseña de la contaminación en el agua, en el suelo y en el aire.
- ¿Cómo influyen en los seres humanos la contaminación radiactiva, lumínica, sonora y visual?
- Consulta en la red, ¿qué son los contaminantes orgánicos persistentes —COPs—?

2. Actividad en equipo. La tabla y la gráfica siguientes pertenecen a la función $r(x) = -\frac{1}{x}$, analícenla con cuidado y contesten las siguientes cuestiones.

a) ¿Qué ocurre con la función cuando $x = 0$?
b) ¿Qué le pasa a $r(x)$ cuando x se acerca mucho a cero por el lado de los números negativos?, esto se escribe así: $x \to 0^-$.
c) ¿Qué le pasa a $r(x)$ cuando x se acerca mucho a cero por el lado de los números positivos?, esto se escribe así: $x \to 0^+$.
d) ¿Cómo es el comportamiento de $r(x)$ cuando x tiende hacia $-\infty$? (Se escribe, $x \to -\infty$).
e) ¿Cómo es el comportamiento de $r(x)$ cuando x tiende hacia $+\infty$? (Se escribe, $x \to +\infty$).

x	–3	–2	–1	–0.1	–0.01	–0.001	0^-
$r(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	10	100	1000	$+\infty$

x	0^+	0.001	0.01	0.1	1	2	3
$r(x)$	$-\infty$	-1000	-100	-10	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$



Si hicieron un buen análisis de la situación anterior, seguramente sus respuestas son congruentes con éstas.

a) La función no está definida para x igual a cero. Se escribe de la siguiente manera:

$$r(x) = -\frac{1}{x} \qquad \text{donde} \qquad x \neq 0$$

b) La función tiende hacia el infinito positivo. Es decir, en matemáticas

$$r(x) \to +\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0^-$$

c) La función tiende hacia el infinito negativo. Es decir, en matemáticas

$$r(x) \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0^+$$

d) La función tiende a cero; es decir, a juntarse con el eje x.

$$r(x) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\infty$$

e) Lo mismo que en el inciso *d*). Observa la gráfica.

$$r(x) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to +\infty$$

Función racional. Definición y elementos

Una función racional es de la forma

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{con} \qquad q(x) \neq 0,$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y se supone que no tienen factores en común. Estas funciones no están definidas cuando el denominador $q(x)$ es cero y por tanto no son continuas.

Ejemplo:

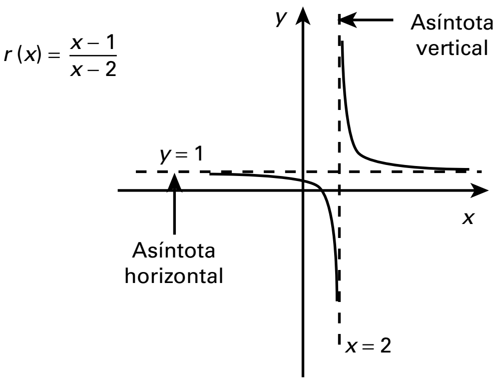
Trazar la gráfica de la función $r(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$.

Es evidente que la función no está definida para $x = 2$. En consecuencia, es importante investigar el comportamiento de la función en valores cercanos a 2. Observa con mucha atención la gráfica para que comprendas las siguientes conclusiones.

$r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$. "$r(x)$ tiende al infinito negativo cuando x tiende a 2 por la izquierda".

$r(x) \to +\infty$ cuando $x \to 2^+$. "$r(x)$ tiende al infinito positivo cuando x tiende a 2 por la derecha".

Por último, $r(x) \to 1$ cuando $x \to -\infty$ y $r(x) \to 1$ cuando $x \to +\infty$.



(*Continúa*)

(*Continuación*)

La recta $x = 2$ se llama **asíntota vertical**, y la recta que está en $y = 1$ es una **asíntota horizontal**. En lenguaje coloquial, la asíntota de una función es una recta a la que la gráfica se acerca cada vez más conforme se recorre la recta en cualquier dirección.

Otra manera de graficar una función racional $r(x)$ es realizar la división de sus componentes:

$$r(x) = \frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Observa la división.

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \\ x-2 & \;x-1 \\ & -x+2 \\ \hline & \quad\;\; 1 \end{array} \qquad = 1 + \frac{1}{x-2}$$

El resultado de la división significa que la función $r(x)$ está desplazada 1 unidad hacia arriba y 2 unidades hacia la derecha.

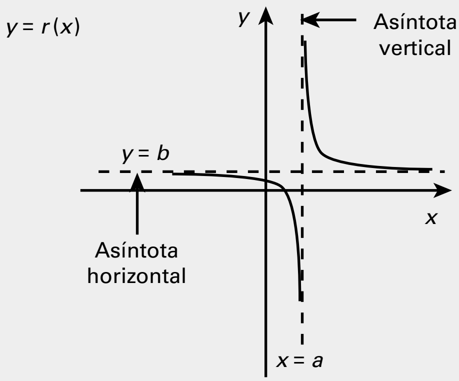
Asíntotas

1. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de una función $y = r(x)$. Si

$$y \to +\infty \quad \text{o} \quad y \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to a^+ \quad \text{o} \quad x \to a^-$$

2. La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de una función $y = r(x)$. Si

$$y \to b \qquad \text{cuando} \qquad x \to +\infty \quad \text{o} \quad x \to -\infty$$



Método general para graficar una función racional

Ejemplo:

Trazar la gráfica de la función racional $r(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x-6}$.

Solución:

1. Factorizamos el numerador y el denominador.

$$r(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-x-6}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$

2. Intersecciones con los ejes

Con el eje *x* (*y* = 0)	Con el eje *y* (*x* = 0)
$\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}=0 \Rightarrow$ $(x+1)(x-2)=0$ Por tanto, $x=-1$ y $x=2$	$r(0)=\dfrac{(0+1)(0-2)}{(0+2)(0-3)}=\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$

3. Asíntota horizontal. Si existe, determinamos su valor dividiendo tanto el numerador como el denominador entre la *x* con mayor exponente que se encuentra en el denominador, y luego hacemos tender *x* hacia el infinito positivo o negativo.

$$r(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-x-6}=\frac{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{6}{x^2}}=\frac{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}}=\frac{1-0-0}{1-0-0}=1$$

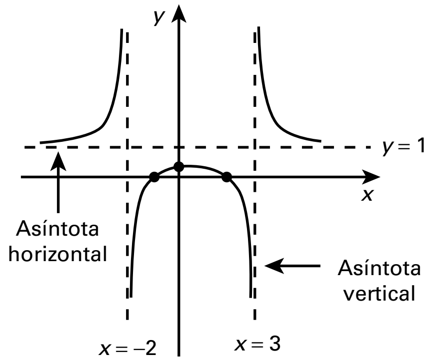
Una expresión de la forma $\dfrac{c}{x^n}$ se acerca mucho a cero cuando *x* tiende a $\pm\infty$.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

4.	**Asíntota vertical.** Se presenta donde la función no está definida; es decir, donde el denominador es cero.
	$(x + 2)(x - 3) = 0$ entonces $x = -2$ y $x = 3$
5.	**Gráfica.** Se grafica toda la información obtenida en los pasos 1-4 y trazamos tantos puntos adicionales como sea necesario.

x	$r(x)$
-3	$\frac{5}{3}$
4	$\frac{5}{3}$



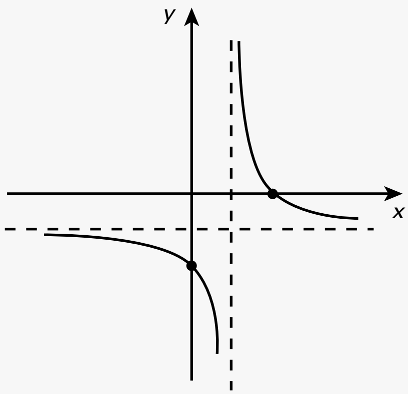
Procedimiento para trazar gráficas de funciones racionales

1. **Factorización.** Factoriza el numerador y el denominador.
2. **Intersecciones.** Encuentra las intersecciones en el eje x determinando los ceros del numerador, y las intersecciones con el eje y haciendo $x = 0$ en la función.
3. **Asíntotas verticales.** Para obtenerlas primero determina los ceros del denominador, luego analiza si $y \to +\infty$ o $y \to -\infty$ a los lados de cada asíntota.
4. **Asíntota horizontal.** Determina la asíntota horizontal dividiendo tanto el numerador como el denominador entre la x con mayor exponente que se encuentre en el denominador, y después haz que $x \to \pm\infty$.
5. **Traza la gráfica.** Grafica la información obtenida en los primeros cuatro pasos. Después calcula tantos puntos adicionales como creas necesarios.

Evidencias de aprendizaje

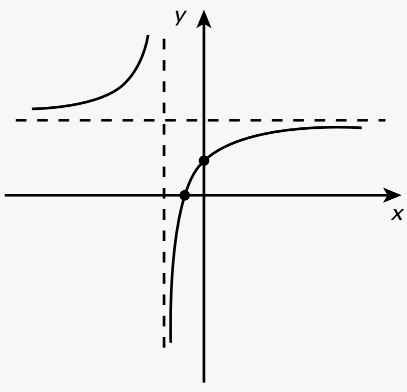
1. Dadas las siguientes funciones racionales y su gráfica determina las intersecciones con los ejes y las asíntotas.

a) $r(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$

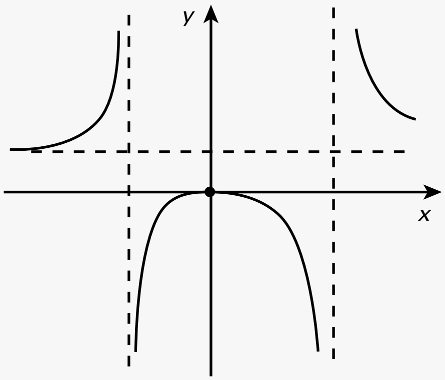


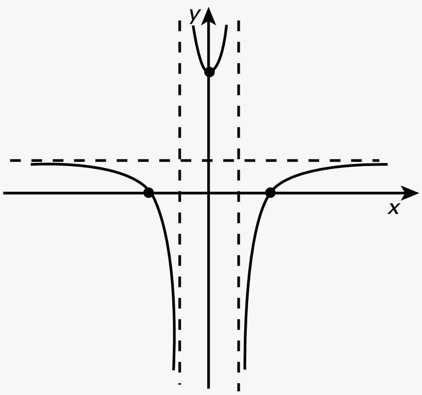
Intersecciones con el eje *x*
Intersecciones con el eje *y*
Asíntotas verticales
Asíntotas horizontales

b) $r(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$



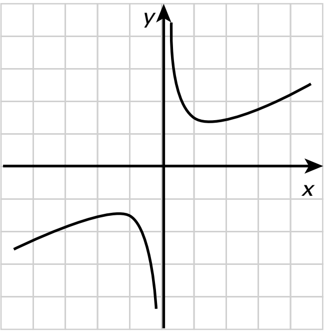
Intersecciones con el eje *x*
Intersecciones con el eje *y*
Asíntotas verticales
Asíntotas horizontales

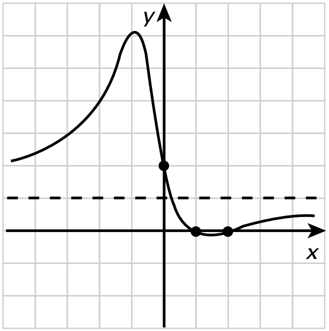
<table>
<tr><td rowspan="4">c) $r(x)=\dfrac{x^2}{x^2-x-6}$
</td><td>Intersecciones con el eje *x*</td></tr>
<tr><td>Intersecciones con el eje *y*</td></tr>
<tr><td>Asíntotas verticales</td></tr>
<tr><td>Asíntotas horizontales</td></tr>
</table>

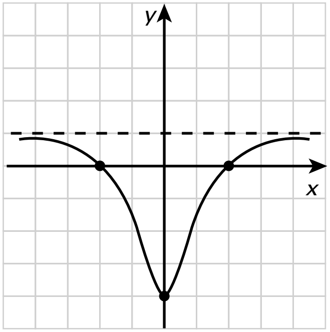
<table>
<tr><td rowspan="4">d) $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$
</td><td>Intersecciones con el eje *x*</td></tr>
<tr><td>Intersecciones con el eje *y*</td></tr>
<tr><td>Asíntotas verticales</td></tr>
<tr><td>Asíntotas horizontales</td></tr>
</table>

2. Asocia cada gráfica con su ecuación y escríbela debajo de cada ilustración.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{2x}$ *b*) $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$ *c*) $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$







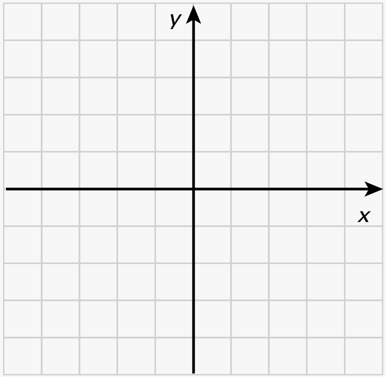
3. Determina la factorización, las intersecciones y las asíntotas y después traza la gráfica de cada función racional.

Factorización	
a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$	
Intersecciones con *x*	**Intersecciones con *y***

Asíntotas horizontales	Asíntotas verticales

Gráfica

x	y

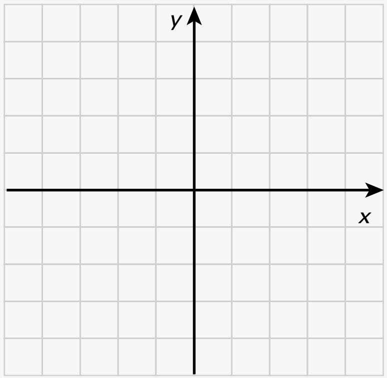


Factorización
b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$

Intersecciones con *x*	Intersecciones con *y*

Asíntotas horizontales	Asíntotas verticales
Gráfica	

x	y



Funciones con asíntotas inclinadas

Hay funciones como $r(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$, en donde el grado del numerador es uno más que el del denominador. Entonces, la función tiene una asíntota **oblicua** o **inclinada**. Si dividimos, tenemos que obtenemos la ecuación de una recta más otra función racional.

Fíjate que es la ecuación de una recta $y = mx + b$

$$r(x)=x+1-\frac{4}{x+1}$$

Observa la división:

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x+1 & x^2+2x-3 \\ & \underline{-x^2-\ x} \\ & \qquad x-3 \\ & \qquad \underline{-x-1} \\ & \qquad\ -4 \end{array} = x+1-\frac{4}{x+1}$$

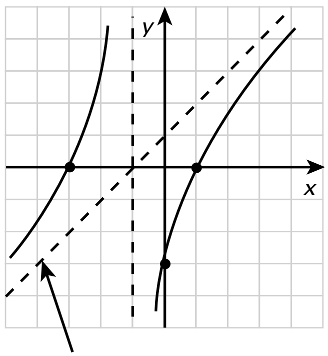
Esto significa que, para ciertos valores de x, la gráfica se acerca a la recta $y = mx + b$, que representa la *asíntota inclinada*. Por otra parte, factorizando el numerador original para $r(x)$:

$$r(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{x+1}$$

por lo que las intersecciones en x están en –3 y 1, y la intersección con y en –3. La asíntota vertical está en $x = -1$.

Para bosquejar la gráfica calculamos algunos otros puntos adicionales que nos definan la curva.

x	$r(x)$
–4	$-\frac{5}{3}$
–2	3
2	$\frac{5}{3}$
3	3

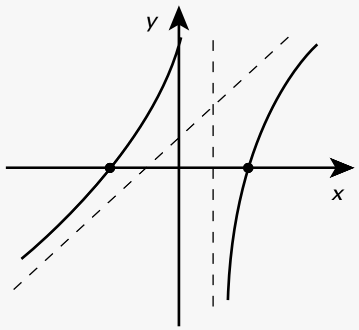


$y = x + 1$, es la asíntota inclinada

Evidencias de aprendizaje

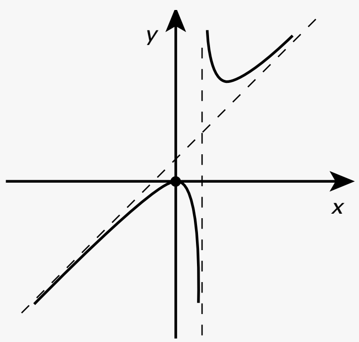
1. Dadas las siguientes funciones racionales y su gráfica, determina las intersecciones con los ejes y las asíntotas vertical e inclinada.

a) $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$



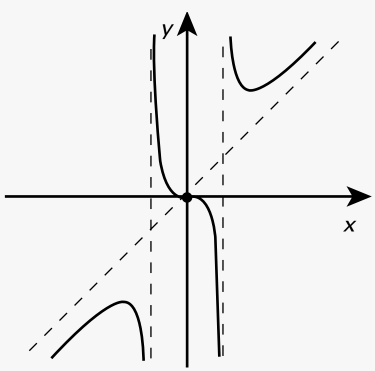
Intersecciones con el eje x
Intersecciones con el eje y
Asíntota vertical
Asíntota inclinada

b) $r(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$



Intersecciones con el eje x
Intersecciones con el eje y
Asíntota vertical
Asíntota inclinada

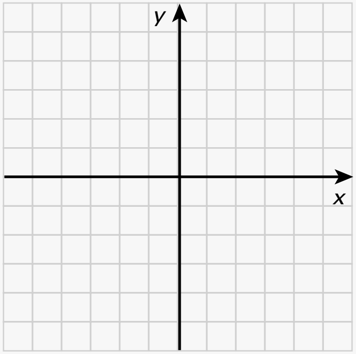
c) $r(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$



Intersecciones con el eje x
Intersecciones con el eje y
Asíntota vertical
Asíntota inclinada

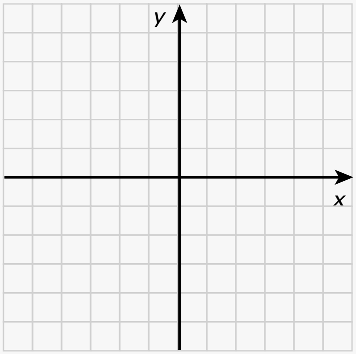
2. Determina la factorización, las intersecciones y las asíntotas vertical e inclinada y después traza la gráfica de cada función racional.

a) $r(x)=\dfrac{4-x^2}{x+1}$



Intersecciones con el eje x	
Intersecciones con el eje y	
Asíntota vertical	
Asíntota inclinada	

b) $r(x)=\dfrac{x^2+x}{1-2x}$



Intersecciones con el eje x	
Intersecciones con el eje y	
Asíntota vertical	
Asíntota inclinada	

Aplicaciones

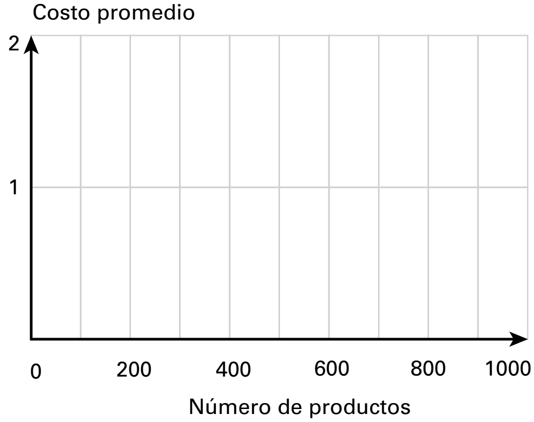
1. **Costo promedio.** El costo de producir x unidades de un producto es $C(x) = 150 + 0.25x$ dólares.

   Por tanto, el costo promedio por unidad es:

$$C(x)=\frac{150+0.25x}{x}$$

Traza la gráfica de la función costo promedio y halla el costo promedio de producir 10,000 unidades de este producto.

x	$C(x)$
200	
400	
600	
800	
1000	

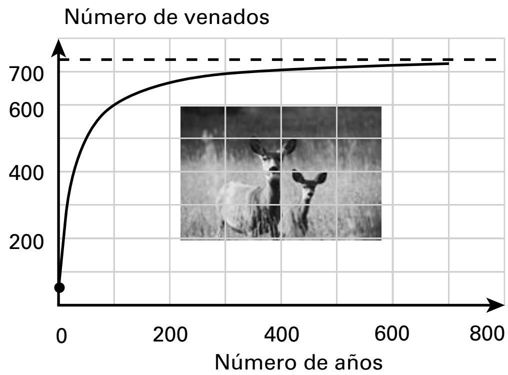


2. **Población de venados.** La asociación protectora de animales introduce 50 venados en un terreno para su reproducción. El crecimiento del rebaño está dado por:

$$C(t) = \frac{10(5+3t)}{1+0.04t}, \qquad t \geq 0$$

a) Determina la población de venados cuando t sea 10, 20 y 30 años.

b) Según la gráfica mostrada, ¿cuál es el límite del crecimiento del número de venados?



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 6

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• definir los componentes polinomiales de una función racional?	
• Identificar las posibles asíntotas de funciones racionales, —horizontales, verticales u oblicuas?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• expresar una función racional mediante polinomios que carecen de factores comunes?	
• determinar el dominio de definición de una función racional?	
• determinar si una función racional posee asíntotas horizontales, verticales u oblicuas y obtener éstas en caso afirmativo?	
• elaborar la gráfica de una función racional auxiliándose, cuando existen las asíntotas?	
• aplicar las funciones racionales en la resolución de problemas?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.4. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

BLOQUE

7 Funciones exponenciales y logarítmicas

Crecimiento demográfico. Uno de los principales problemas que enfrentan las zonas turísticas del mundo es el crecimiento demográfico que se comporta como un modelo de *función exponencial* y que opera en detrimento de las reservas naturales del planeta.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos con funciones exponenciales y logarítmicas, aplicando las propiedades de crecimiento y decrecimiento propias de estas funciones, para representar situaciones y resolver problemas teóricos o prácticos, concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos exponenciales y logarítmicos, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Interpretar tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a las funciones exponenciales y logarítmicas.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Identificar la forma de las funciones exponenciales (crecientes y decrecientes).
- Reconocer la función exponencial natural (el número *e* crecimiento o decrecimiento en base *e*).
- Interpretar algebraica y gráficamente la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.

- Identificar las propiedades de los logaritmos (inherentes a su definición. Operativas)
- Comprender las propiedades y técnicas de resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Explicar por qué una función exponencial es creciente o decreciente.
- Obtener el valor inicial y factor de crecimiento de una función exponencial.
- Utilizar la función exponencial natural para modelar situaciones que involucran al número e.
- Construir la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.
- Operar con logaritmos y resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Reconocer situaciones que pueden modelarse mediante funciones exponenciales y logarítmicas y aplicar éstas para hallar su solución.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Asumir una actitud de apertura que favorece la solución de problemas.
- Apreciar la utilidad de las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones, para simplificar procesos y obtener soluciones precisas.
- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerar los de otras personas.
- Reconocer sus errores en los procedimientos y mostrar disposición para solucionarlos.
- Actuar de manera propositiva al resolver los ejercicios planeados.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.
- Asumir una postura constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta, dentro de distintos equipos de trabajo.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- A partir de la ecuación de la función exponencial decidir si ésta es creciente o decreciente.
- Obtener valores de funciones exponenciales y logarítmicas utilizando tablas o calculadora.
- Trazar las gráficas de funciones exponenciales tabulando valores, y utilizarlas para obtener gráficas de funciones logarítmicas.
- Utilizar las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Aplicar las propiedades y relaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver problemas.

Evidencias de aprendizaje

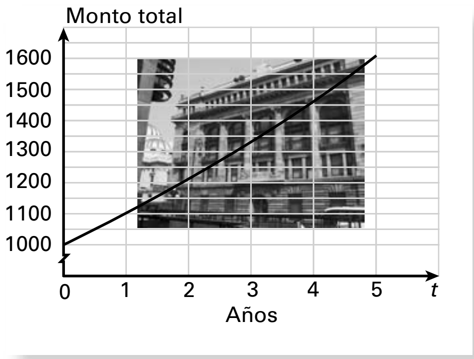
- Determina si el valor de la base es mayor o menor que 1, para saber si la función exponencial crece o decrece.
- Interpreta y aproxima potencias para exponentes reales cualesquiera con propiedades de los exponentes, y los verifica o completa con calculadora.
- Elabora las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica con tabulación de puntos y reflexiones sobre la recta $y = x$.
- Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas reescribiendo exponentes como logaritmos y viceversa.
- Aplica propiedades de exponentes y logaritmos, y las funciones exponenciales y logarítmicas, para modelar situaciones diversas como interés compuesto, continuo, depreciación de un bien, etcétera.

Actividades de aprendizaje significativo

1. La tabla y la gráfica anexas muestran el comportamiento de una inversión de $P = 1000$ pesos a una tasa de interés r de 10% a lo largo de 5 años. Si se reinvierte el interés, completa la tabla para los años 4 y 5 y verifica que los datos numéricos corresponden a la gráfica, para determinar un modelo algebraico que represente el monto A después de t años. ¿Cómo se llama este modelo matemático?

Año	Secuencia algebraica	Modelo
1	$A = 1000 + 1000(0.10) = 1000(1 + 0.10) = 1100$	$A = 1000(1.10)^1$
2	$A = 1000(1.10) + 1000(1.10)(0.10) = 1000(1.10)(1 + 0.10) = 1210$	$A = 1000(1.10)^2$
3	$A = 1000(1.10)^2 + 1000(1.10)^2(0.10) = 1000(1.10)^2(1 + 0.10) = 1331$	$A = 1000(1.10)^3$

4		
5		
t		



2. **Actividad en equipo.** Toma una hoja de papel de tu cuaderno que tiene aproximadamente 0.026 milímetros de espesor. Estarás de acuerdo que cada vez que doblemos la hoja a la mitad, el grosor de ésta se duplica.

a) Realiza el experimento de doblarla hasta 8 veces por la mitad.
b) La idea es demostrar que la rapidez con que crece el grosor se comporta de acuerdo al modelo de la función $f(x) = 2^x$, donde x representa el número de veces que realizas el experimento de doblarla por la mitad.
c) ¿Cuál sería el valor resultante del grosor de la hoja si pudiéramos doblarla 50 veces?

Funciones exponenciales

Se llama *función exponencial* a la función de la forma $f(x) = 2^x$; la variable, x, es el exponente. (Atención: no confundas con la función potencia $g(x) = x^2$, donde la variable es la base).

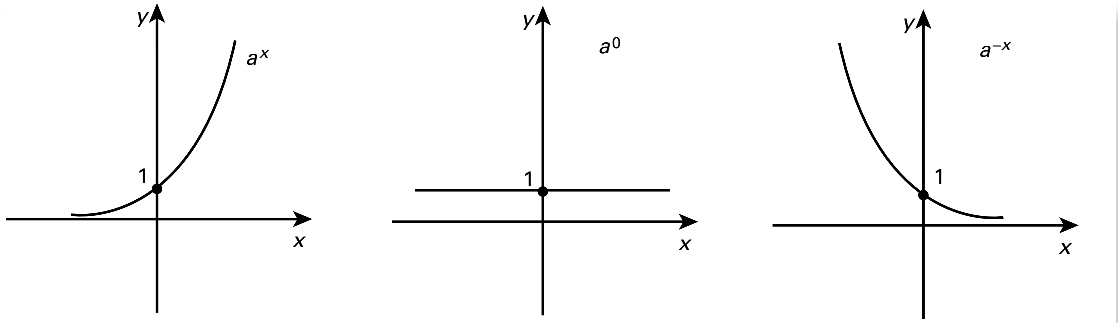
En general, una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Recordemos qué significa esto:

Si $x = n$, donde n es un entero positivo, entonces $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$; si $x = 0$, entonces $a^0 = 1$, y si $x = -n$, entonces $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}}$.

Una función exponencial es *creciente*, *uno* o *decreciente* dependiendo de si el exponente variable x es positivo, cero o negativo respectivamente.



Función creciente Función constante Función decreciente

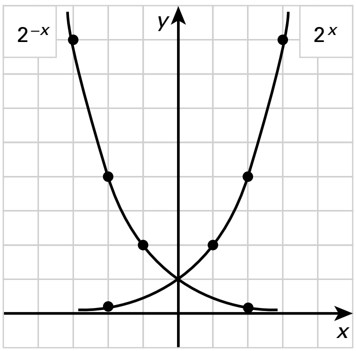
Ejemplo:

Trazar las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$.

Solución:

Elaboramos una tabla de valores como la siguiente, marcamos los puntos en las coordenadas y con una línea suave los unimos para obtener las curvas:

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 2^{-x}$
–3	$\frac{1}{8}$	8
–2	$\frac{1}{4}$	4
–1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$



Es importante que notes que

$$g(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$$

Factor de crecimiento. El ejemplo anterior nos enseña que:

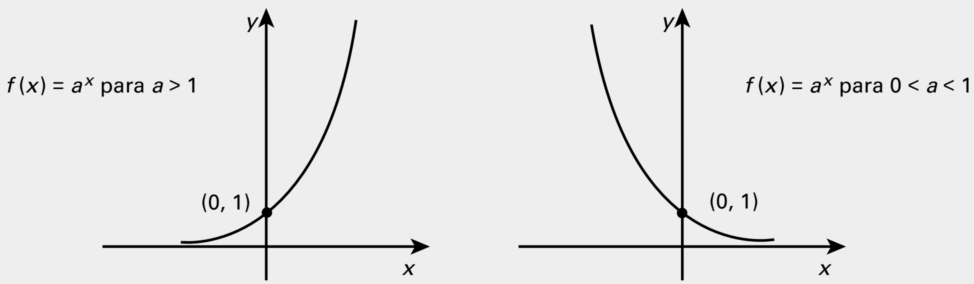
- Si $0 < a < 1$, entonces la función a^x decrece rápidamente conforme x se hace más grande.
- Si $a > 1$ la función crece muy rápido y mientras más grande sea la base, más rápido será el crecimiento.
- Si la base es mayor de 0, entonces la curva tiende a 0 cuando x decrece a través de valores negativos, por lo que el eje x es una asíntota horizontal.

Función exponencial

Para toda $a > 0$, la función exponencial con base a queda definida por:

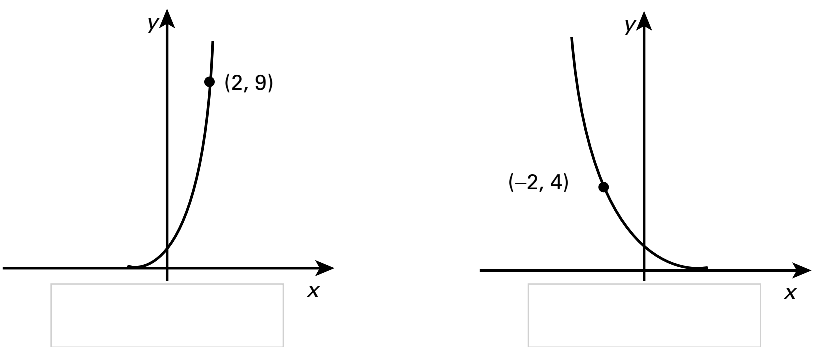
$$f(x) = a^x$$

donde el dominio de $f(x)$ son todos los números reales y el rango es $f(x) > 0$. La gráfica de $f(x)$ tiene una de estas formas

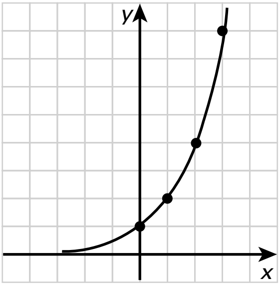


Evidencias de aprendizaje

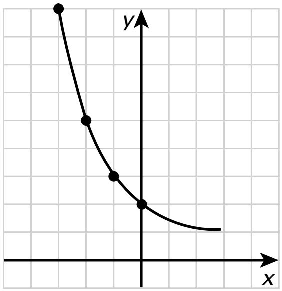
1. Identifica los valores de a y de x en cada función $f(x) = a^x$ de las siguientes gráficas, y escribe en el recuadro la ecuación que le corresponde a cada una de ellas.

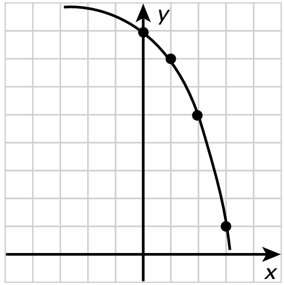


2. Usa la gráfica de $f(x) = 2^x$ para escribir las ecuaciones $g(x) = -2^x + 9$ y $h(x) = 2^{-x} + 1$ en el espacio que le corresponde a cada una de las otras dos gráficas. Recuerda las transformaciones de gráficas que se estudiaron en secciones pasadas.



$f(x) = 2^x$

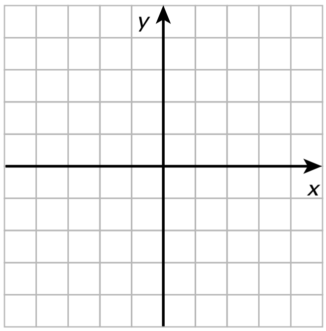




3. Traza la gráfica de cada función utilizando una tabla de valores.

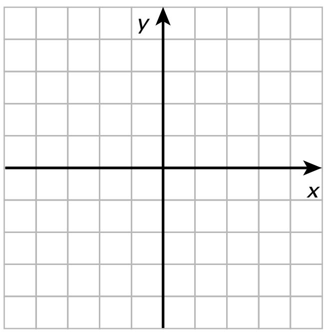
- *a*) $f(x) = 3^x$

x	3^x
–3	
–2	
–1	
0	
1	
1.5	



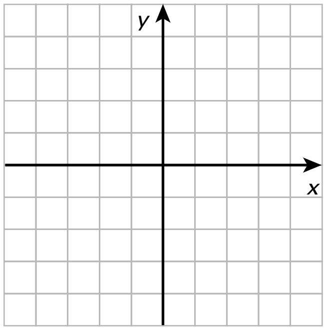
- *b*) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$(1/3)^x$
–1.4	
–1.2	
–1	
0	
1	
2	

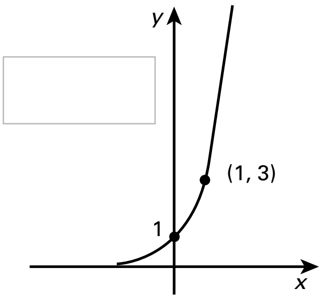


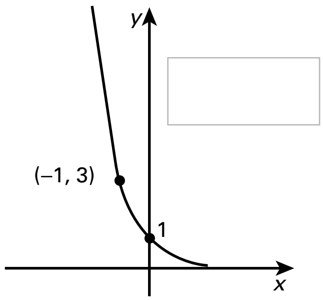
- *c*) $h(x) = (0.6)^x$

x	$(0.6)^x$
–2	
–1	
0	
1	
2	
3	



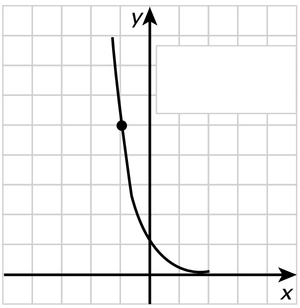
4. Determina la función correspondiente $f(x) = a^x$, cuya gráfica se da en cada caso.

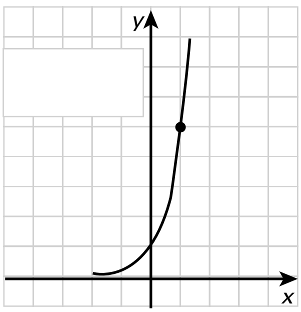


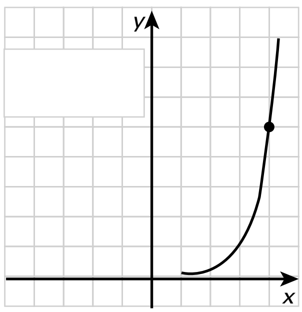


5. Identifica a cuál de estas funciones exponenciales corresponden las gráficas:

a) $f(x) = 5^x$, *b*) $f(x) = 5^{-x}$, *c*) $f(x) = 5^{x-3}$







La función exponencial con potencias irracionales

Si x es un número racional, $x = \frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q > 0$, entonces,

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

En este caso, la gráfica de la función exponencial no ha sido problema, pero ¿qué ocurre cuando x es irracional? ¿Existen acaso "huecos" en la curva exponencial? La respuesta es no, porque si $x = \sqrt{3} \approx 1.7320$, un número irracional, éste debe satisfacer la siguiente condición

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8.$$

Por lo tanto,

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}.$$

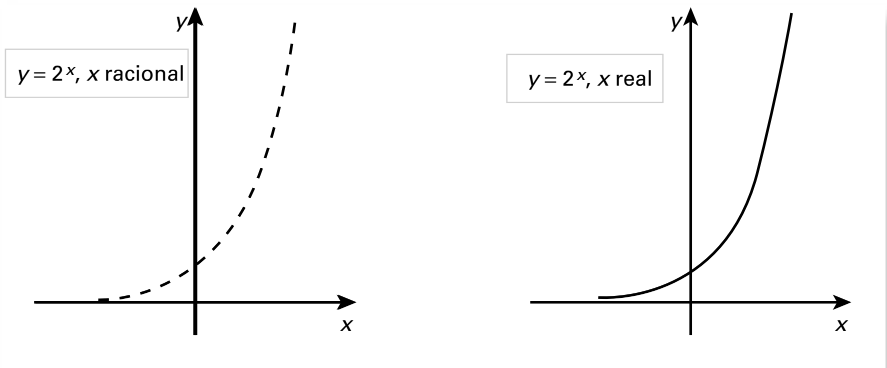
Por supuesto, los números 1.7 y 1.8 son números racionales. En consecuencia, buscando mejores aproximaciones:

$$1.73 < \sqrt{3} < 1.74 \quad \text{entonces} \quad 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74}$$

$$1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 \quad \text{entonces} \quad 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321}$$

$$1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 \quad \text{entonces} \quad 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206}$$

Esto nos lleva a la conclusión que siempre habrá un número mayor que el considerado a la izquierda y otro menor que el considerado a la derecha de $\sqrt{3}$, respectivamente. Así, la diferencia entre ambos extremos se va cerrando, y el valor se puede calcular con exactitud hasta de seis cifras, lo que confirma nuestra respuesta; no hay "huecos" y, por lo tanto, la función 2^x es **continua**, es decir su dominio es cualesquier número real.

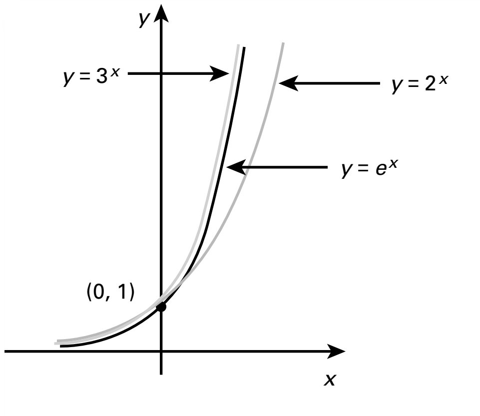


Función exponencial natural

La base de una función exponencial puede ser cualquier número positivo; sin embargo, el 2 y el 10 son muy convenientes, porque representan el sistema numérico binario y el sistema decimal, respectivamente. En realidad, la base más importante es el número identificado como $e \approx 2.71828$, porque aparece de manera natural en varios procesos y porque la pendiente de la función exponencial $y = e^x$ en el punto (0, 1) es exactamente uno. ¿Cómo se obtiene este número e?

En matemáticas, el número e se define como el valor más próximo a la expresión $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando x toma valores muy grandes, es decir, cuando tiende al infinito. La tabla siguiente muestra algunos valores de dicha expresión, en aproximaciones graduales hasta con cinco decimales. Observa la secuencia de los valores de la tabla para comprender mejor esta expresión algebraica.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2.00000	2.00000
5	1.20000	2.48832
10	1.10000	2.59374
100	1.01000	2.70481
1,000	1.00100	2.71692
10,000	1.00010	2.71814
100,000	1.00001	2.71826
1,000,000	1.000001	2.71828
10,000,000	1.0000001	2.71828



Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ se encuentra entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

Función exponencial natural

La función exponencial natural con base $e = 2.71828$ tiene la forma:

$$f(x) = e^x$$

donde el dominio de $f(x)$ son todos los números reales.

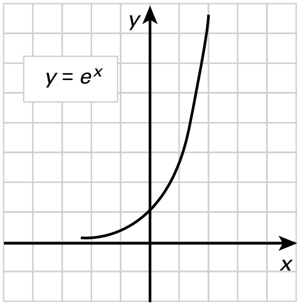
Es muy conveniente que utilices la tecla e^x de tu calculadora científica para evaluar la función exponencial $f(x) = e^x$.

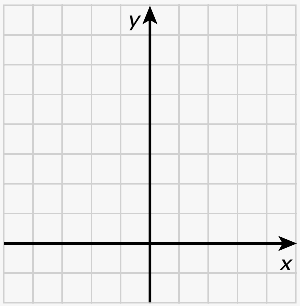
Por ejemplo, si vas a evaluar $y = 3e^{1.23}$; oprime la tecla e^x, ingresa el número 1.23 y multiplica por 3. Obviamente, el procedimiento para realizar esta operación dependerá del tipo de calculadora que utilices. En cualquier caso, si la usas correctamente el resultado será:

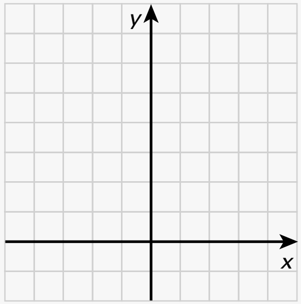
$$y = 3e^{1.23} = 10.2636$$

Autoevaluación

Dada la función de $y = e^x$, traza la gráfica de $y = e^{-x} + 1$ y de $y = e^{x-2}$ sin calcular puntos, es decir a partir de la función estándar. Determina el dominio, el rango y las asíntotas.



Dominio	Rango	Asíntotas	Gráfica de $y = e^{-x} + 1$
			

Dominio	Rango	Asíntotas	Gráfica de $y = e^{x-2}$
			

Interés compuesto

Ejemplo:

Supongamos que se colocan 1000 pesos en una cuenta de ahorro que paga un interés compuesto de 6% anual y lo capitaliza cada tres meses. Determinar la cantidad de dinero que se junta al cabo de 2 años.

Solución:
Si llamamos A_n a la cantidad de dinero que se junta en el periodo n, tendremos que:

$$A_1 = 1000 + 1000\left(\frac{0.06}{4}\right) = 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right) = \$1015$$

$$A_2 = 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right) + 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)\left(\frac{0.06}{4}\right)$$

$$= 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)\left(1 + \frac{0.06}{4}\right) = 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^2 \approx \$1030.23$$

$$A_3 = 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^2 + 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^2\left(\frac{0.06}{4}\right)$$

$$= 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^2\left(1 + \frac{0.06}{4}\right) = 1000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^3 \approx \$1045.68$$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Al cabo de 2 años u ocho periodos de intereses:

$$A_8 = 1000\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{(4)(2)} \approx \$1126.50$$

Si P es el capital inicial que se invierte, r es la tasa de interés simple, n es el número de periodos al año en que se capitaliza el interés y A es el monto después de t años, el resultado de la situación anterior se puede generalizar con la expresión:

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

que nos permite calcular de manera directa el monto del capital inicial después de t años con un **interés compuesto**.

Autoevaluación

Cálculo del interés compuesto. Se invierte una cantidad de 100 dólares a una tasa de interés de 12% anual. Completa la tabla siguiente y determina los montos en la cuenta después de tres años si el interés se calcula anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensualmente y diariamente. ¿Qué periodo de composición es el más conveniente?

Periodos de composición	n	Monto después de 3 años
Anual	1	$A = 100\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{(1)(3)} \approx 140.50$ dólares
Semestral	2	
Trimestral	4	
Mensual	12	
Diario	365	

Evidencias de aprendizaje

1. Se invierten $10,000 a una tasa de interés del 8%, compuesto semestralmente. Calcula el valor de la inversión después de 5 años. Completa la secuencia para encontrar la respuesta.

Periodo de composición	Tasa	*n*	Valor de la inversión después de 5 años

2. Se invierten 300 dólares a una tasa de interés del 5% anual, determina el monto de la inversión al final de 5 años para cada una de las siguientes formas de interés compuesto.

a) Anual, *b*) Semestral, *c*) Mensual, *d*) Diario

Periodo de composición	*n*	Valor de la inversión después de 5 años
Anual		
Semestral		
Mensual		
Diario		

3. Por un préstamo de $30,000 se paga una tasa de interés anual del 14%, compuesto semestralmente. Calcula el monto al vencimiento al final del número de años dado.

a) 4 años, *b*) 5 años, *c*) 10 años

Número de años (*t*)	*n*	Valor del préstamo al final de *t* años
4	2	
5	2	
10	2	

4. El valor de un automóvil es de $180,000. ¿Cuál tasa de interés dará la mejor inversión en el automóvil si se va a pagar en 5 años?

   a) 11.5% al año, calculado semestralmente.
   b) 10%, calculado trimestralmente.

Tasa de interés	n	Monto del pago al final de 5 años
11.5%	2	
10%	4	

5. Si los pagos del automóvil de la situación anterior se van a realizar mensualmente y no se necesita enganche, ¿cuánto se va a pagar al final de cada mes?
6. **Valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que debe invertirse hoy a una tasa de interés conocida, para producir la cantidad deseada en el futuro.
   Determina cuánto dinero tienes que invertir hoy a una tasa de interés de 8% anual, compuesta semestralmente para recibir 100,000 pesos en 5 años. Completa la tabla.

A	r	n	t	Dinero con valor presente P

Interés continuamente compuesto

Cuando en el interés compuesto el número de periodos n aumenta de manera indefinida y se hacen ciertas transformaciones algebraicas en su fórmula el resultado es el **interés continuamente compuesto**, de manera que el monto final de una inversión se puede obtener con la expresión $A = Pe^{rt}$.

Interés continuamente compuesto

El **interés continuamente compuesto** se calcula con la fórmula

$$A = Pe^{rt}$$

donde
A es el monto después de t años
P es el capital inicial
r es la tasa de interés
t es el número de años

Ejemplo:

Se invierten 100 dólares a una tasa de interés de 12% anual. Determina el monto de la inversión después de tres años si el interés se calcula:

a) continuamente compuesto
b) compuesto diariamente

Solución:

a) Aquí $P = 100$, $r = 0.12$, $t = 3$, por tanto

$$A = Pe^{rt} = 100(e)^{(0.12)(3)} \approx 143.33 \text{ dólares.}$$

b) Aquí $P = 100$, $r = 0.12$, $n = 365$ y $t = 3$, por tanto

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 100\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{(365)(3)} \approx 143.32 \text{ dólares.}$$

Observa que el interés compuesto diariamente y el interés continuo son prácticamente iguales porque n es muy grande.

Evidencias de aprendizaje

1. ¿Cuáles tasas de interés y periodo de cálculo del interés compuesto darán la mejor inversión de un capital de $1000?

a) 11.5% anual, calculado semestralmente,
b) 11.25% anual, calculado trimestralmente,
c) 11% anual, calculado continuamente.

Periodo de composición	Tasa	n	Valor de la inversión después de 3 años
Semestral			
Trimestral			
Continuo			

2. ¿Cuáles de las tasas de interés dadas y periodos de cálculo del interés compuesto darán la mejor inversión de un capital de $1,000?

a) 10.5% anual, calculado semestralmente,

b) 10% anual, calculado continuamente

3. Determina el valor presente de $100,000 si el interés se pagó a una tasa de 6% anual, compuesto continuamente durante 3 años.

Crecimiento exponencial

El crecimiento de una población tiene el mismo principio que el interés continuamente compuesto. De hecho, en ambos casos: el crecimiento de una población (o de una inversión) por periodo es proporcional al tamaño de la población (o al valor de la inversión). De manera que el crecimiento de una población lo podemos calcular así:

Crecimiento exponencial

El **crecimiento** que observa una población es **exponencial** y aumenta de acuerdo a la relación:

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t)$ es la población al momento t
n_0 es el tamaño inicial de la población
r es la tasa relativa de crecimiento de la población
t es el tiempo

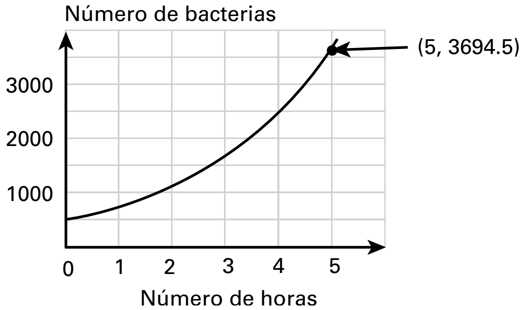
Ejemplo:

El conteo inicial de bacterias en un cultivo es de 500. Posteriormente, un biólogo hace un nuevo conteo de la muestra y encuentra que la tasa relativa de crecimiento es de 40% por hora.

a) Obtener una fórmula para calcular el número $n(t)$ de bacterias después de t horas.
b) ¿Cuál es el conteo estimado después de 5 horas?
c) Trazar la grafica.

Solución:

a) $n(t) = 500e^{0.40t}$ porque $n_0 = 500$ y $r = 0.40$
b) $n(5) = 500e^{(0.40)(5)} \approx 3695$
c)



Evidencias de aprendizaje

Situación	Solución
1. El número de bacterias en un cultivo está dado por la fórmula $n(t) = 500e^{0.50t}$, donde t se mide en horas. *a*) ¿Cuál es la tasa relativa porcentual de crecimiento de esta población? *b*) ¿Cuál es la población inicial del cultivo? *c*) ¿Cuántas bacterias tendrá el cultivo después de tres horas?	*a*) *b*) *c*)

2. La población de cierta ciudad tiene una tasa relativa de crecimiento de 3% anual. La población en el año 2000 era de 350,000 habitantes. Determina la población que tendrá la ciudad en el año 2020.	
3. En 1987, la población de nuestro planeta se estimó en 5,000 millones de personas y la tasa relativa de crecimiento se estimó en 2% anual. Asumiendo que la población mundial sigue un modelo de crecimiento exponencial, determina la población mundial para el año 2010.	
4. Una sustancia radiactiva se desintegra de forma que la cantidad de masa que queda después de t días está dada por la función $m(t) = 13e^{-0.015t}$, donde m está en kilogramos. *a*) Determina la masa en el tiempo $t = 0$. *b*) ¿Cuánta masa queda después de 45 días?	*a*) *b*)
5. La población de venados en cierta región de la sierra Tarahumara tiene una tasa de crecimiento relativo de 5% anual. Se estima que la población en el año 2000 fue de 5,000. ¿Cuál será la población en el año 2012?	

Funciones logarítmicas

Por definición, la función logaritmo es la inversa de la función exponencial. Enseguida te decimos por qué:

Función logaritmo

Sea a un número positivo diferente de 1. La función logaritmo con base a, denotada por $\log_a$ se define como:

$\log_a x = y$ o, escrito de como exponencial, $a^y = x$;

En otras palabras, un **logaritmo es un exponente** al cual debe elevarse la base a para obtener x.

Entonces, si un logaritmo es un exponente, se puede escribir en forma de logaritmo o de exponencial.

El $\log_a x = y$ se lee como "El logaritmo de x de base a es y" y significa que y es el exponente de la base a para obtener x.

Ejemplos:

1. $\log_2 u = v$ porque $2^v = u$, significa que v es el exponente de 2 para obtener u.

2. $\log_{10} 10{,}000 = 4$ porque $10^4 = 10{,}000$, significa que 4 es el exponente de 10 para obtener 10,000.

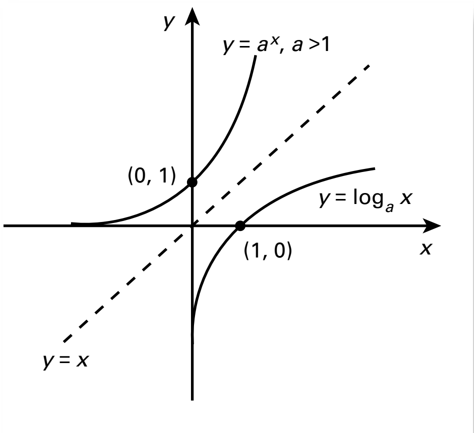
3. $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$, significa que 3 es el exponente de 2 para obtener 8.

4. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, significa que -3 es el exponente de 2 para obtener $\frac{1}{8}$.

Gráfica de la función logaritmo

Hemos visto que la función exponencial tiene como dominio todos los números reales, y como rango el intervalo $f(x) > 0$.

Como la función logaritmo es, por definición, inversa a la exponencial, entonces su dominio es $x > 0$ y su rango son todos los números reales. En la figura anexa, el logaritmo es el reflejo de la función exponencial a lo largo de la recta $y = x$.



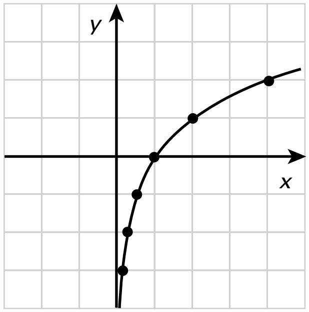
Observa que, puesto que $a^0 = 1$, es evidente que $\log_a 1 = 0$, porque 0 es el exponente de la base a, para que al elevarla nos dé 1.

Ejemplos:

1. Gráfica de una función logaritmo. Trazar la gráfica de $y = \log_2 x$ elaborando una tabla de valores.

Elaboramos la tabla escogiendo valores de x como potencias de 2 para encontrar fácilmente sus logaritmos. (Observa que el exponente de la base 2 es el logaritmo de x).

x	$\log_2 x$
1	0
2^1	1
2^2	2
2^3	3
2^{-1}	–1
2^{-2}	–2
2^{-3}	–3



También puedes obtener la función logaritmo de base 10 y de base e de manera directa en tu calculadora científica.

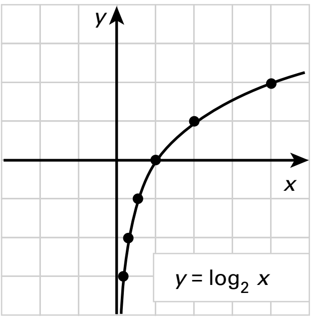
2. Reflexión de las gráficas de logaritmos. Traza la gráfica de las funciones:

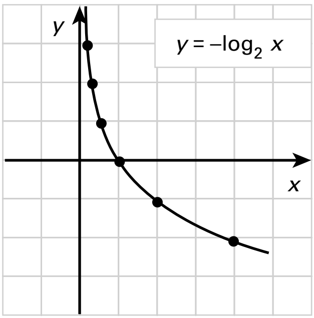
a) $y = -\log_2 x$ *b*) $y = \log_2(-x)$

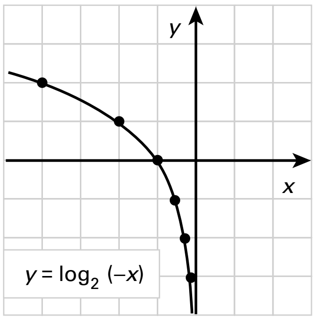
Solución:

a) A partir de la función estándar de $y = \log_2 x$ reflejamos cada punto con respecto al eje x y obtenemos $y = -\log_2 x$.

b) De manera análoga obtenemos $y = \log_2(-x)$ pero reflejando los puntos de $y = \log_2 x$ con respecto al eje y.







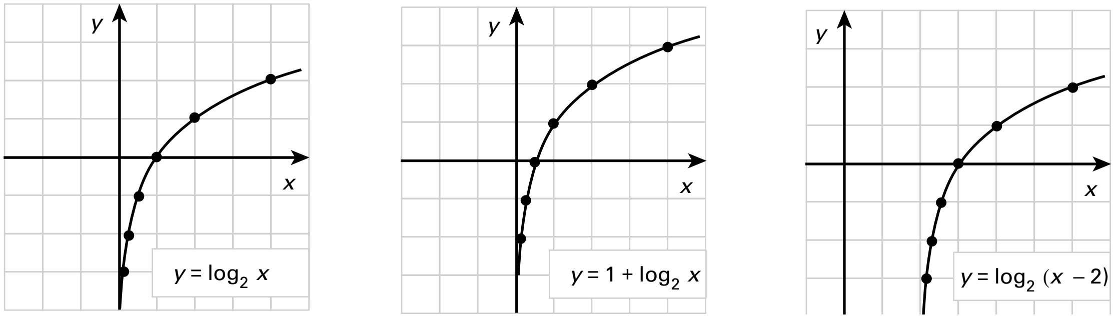
3. Traslación de las gráficas de logaritmos. Traza la gráfica de las funciones:

a) $y = 1 + \log_2 x$ *b*) $\log_2(x - 2)$

Solución:

a) A partir de la función estándar de $y = \log_2 x$ trasladamos verticalmente cada punto de la curva 1 unidad hacia arriba.

b) A partir de la función estándar de $y = \log_2 x$ trasladamos horizontalmente cada punto 2 unidades hacia la derecha.



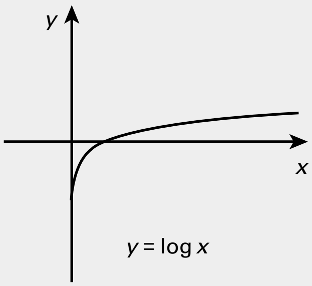
Logaritmos comunes y naturales

Logaritmos comunes

El logaritmo con base 10 se conoce como **logaritmo común**, y se denota omitiendo la base

$$\log_{10} x = \log x$$

Si $y = \log x$, significa que $10^y = x$.



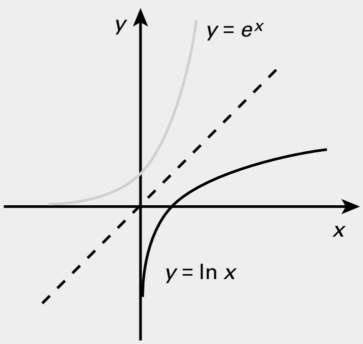
Logaritmos naturales

El logaritmo con base e se conoce como **logaritmo natural**, y se denota mediante ln

$$\ln x = \log_e x$$

Si $y = \ln x$, significa que $e^y = x$.

La función $y = \ln x$ es inversa de $y = e^x$.

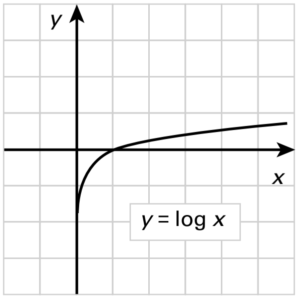


Ejemplos:

1. Utiliza una calculadora para obtener la gráfica de $y = \log x$.

Solución:
Utilizando una calculadora elaboramos una tabla de valores, para valores de x mayores de cero y graficamos los puntos obtenidos, uniéndolos con una curva suave.

x	$\log x$
0.1	–1
0.5	–0.30
1	0
4	0.60
5	0.7
10	1



2. **Determinación del dominio de una función logaritmo.** Hallar el dominio de $y = \ln(x - 2)$.

Solución:
Como sabemos, de acuerdo a la definición de logaritmo, $x - 2 > 0$; por lo tanto, $x > 2$.

Evidencias de aprendizaje

1. Completa la tabla que aparece enseguida expresando la ecuación dada en forma exponencial.

Ecuación	Exponencial	Ecuación	Exponencial
a) $\log_2 16 = 4$		*b*) $\log_3 81 = 4$	
c) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$		*d*) $\ln 6 = x$	
e) $\ln(x - 1) = 2$		*f*) $\ln u = 3$	

2. Completa la tabla que aparece enseguida expresando la ecuación dada en forma de logaritmo.

Ecuación	Logaritmo	Ecuación	Logaritmo
a) $2^4 = 16$		*b*) $3^4 = 81$	
c) $(4)^{\frac{1}{2}} = 2$		*d*) $e^x = 6$	
e) $e^2 = x - 1$		*f*) $e^3 = u$	

3. Usa la definición de logaritmo para completar la tabla y determinar el valor de x.

Ecuación	Valor de *x*	Ecuación	Valor de *x*
a) $\log_2 x = 4$	$x =$	*b*) $\log_{10} x = 2$	$x =$
c) $\log_x 16 = 4$	$x =$	*d*) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$	$x =$
e) $\ln x = 1$	$x =$	*f*) $\log_3 x = 3$	$x =$

4. Utiliza una calculadora cuando lo consideres necesario para evaluar la expresión dada aproximando tu respuesta con cuatro decimales.

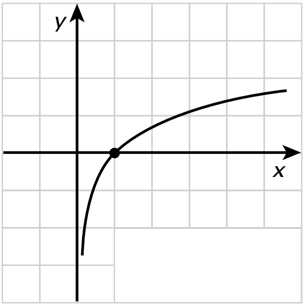
a) $\log 2 =$	*b*) $\log 10 =$	*c*) $\log 32.5 =$	*d*) $\ln 5 =$
e) $\log 1000 =$	*f*) $\log_3 1 =$	*g*) $\ln 50 =$	*h*) $\ln\left(1+\sqrt{5}\right) =$

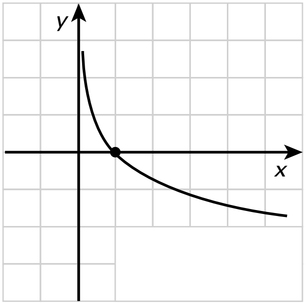
5. Determina el dominio de la función dada.

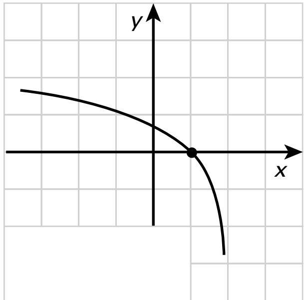
Función	Dominio	Función	Dominio
a) $y = \log(2 + 3x)$		*b*) $y = \log(x^2 - 1)$	
c) $y = \ln x + \ln(x - 1)$		*d*) $y = (2 - x)$	

6. Relaciona la función logaritmo dada con la gráfica correspondiente.

a) $y = \ln(2 - x)$ *b*) $y = -\ln x$ *c*) $y = \ln x$

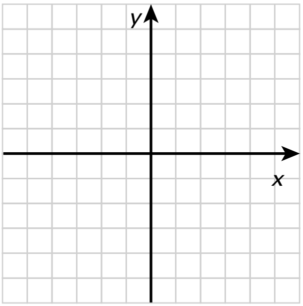


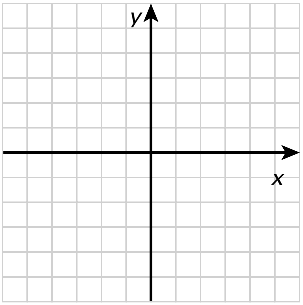


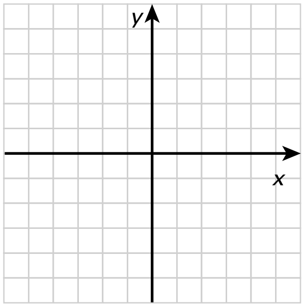


7. A partir de la función estándar $y = \ln x$ traza las gráficas de:

a) $y = \ln(x + 1)$ *b*) $y = 1 + \ln x$ *c*) $y = -\ln(-x)$







Leyes de los logaritmos

En secciones anteriores hemos estudiado que los logaritmos son exponentes, por tanto las leyes de éstos tienen que ser la base de las leyes de los logaritmos. A continuación se presentan dichas leyes omitiendo su demostración, ya que su interés, en última instancia, estriba en la amplia variedad de aplicaciones que tienen.

Leyes de los logaritmos

Sean $A > 0$, $B > 0$ y n cualquier número real.

1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$ El logaritmo del producto de números es la suma de los logaritmos de los números.

2.	$\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right)=\log_a A-\log_a B$	El logaritmo del cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3.	$\log_a(A^n)=n\log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Ejemplos:

1. Utilizar las leyes de los logaritmos para reescribir cada expresión.

a) $y = \ln 7x$ *b*) $y=\log(x^3y^5)$ *c*) $y=\ln\dfrac{2x}{\sqrt[3]{5x}}$

Solución:

a) $y = \ln 7x = \ln 7 + \ln x$ Utilizando la primera ley

b) $y=\log(x^3y^5)=\log x^3+\log y^5$ Utilizando la primera ley

$= 3\log x + 5\log y$ Utilizando la tercera ley

c) $y=\ln\dfrac{2x}{\sqrt[3]{5x}}=\ln(2x)-\ln\sqrt[3]{5x}$ Utilizando la segunda ley

$$=\ln 2+\ln x-\frac{1}{3}\ln(5x)=\ln 2-\frac{1}{3}(\ln 5+\ln x)$$

Utilizando la 1ª y 3ª leyes.

2. Escribir la expresión $2\log x+\dfrac{1}{2}\log(x-3)$ como un monomio.

Solución:

$2\log x+\dfrac{1}{2}\log(x-3)=\log x^2+\log(x-3)^{\frac{1}{2}}$ Utilizando la tercera ley

$=\log\left[x^2(x-3)^{\frac{1}{2}}\right]$ Utilizando la primera ley

Atención. Las leyes de los logaritmos nos ayudan a simplificar los productos, cocientes y potencias de logaritmos, sin embargo, *no hay leyes para el logaritmo de una suma o una diferencia* de manera que debemos **tener cuidado** cuando hagamos uso de ellas.

$$\log(a-b)\neq\log a-\log b$$

Autoevaluación

1. Utiliza las leyes de los logaritmos para escribir las siguientes expresiones en forma expandida.

a)	$\log (xy)^3 =$
b)	$\log \sqrt{1+x^2} =$
c)	$\log \dfrac{x+2}{\sqrt{1+x^2}} =$

2. Utiliza las leyes de los logaritmos para escribir las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

a)	$3\log x + 3\log y =$
b)	$\frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log x^2 =$
c)	$\log(x+2) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) =$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Las definiciones de logaritmo y exponencial —así como sus propiedades— son muy útiles, porque podemos resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, y también modelar situaciones con dichos conceptos.

Ejemplos:

1. Resolver para x la ecuación $2^x = 5$.

Solución:

$2^x = 5$

$\ln 2^x = \ln 5$ Sacamos logaritmos de ambos lados.

$x \ln 2 = \ln 5$ Usamos la tercera ley.

$x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3220$ Despejando x y usando una calculadora.

2. Resolver para x la ecuación $3^{x+2} = 7$.

$\ln 3^{x+2} = \ln 7$	Obtenemos logaritmos de ambos lados.
$(x + 2) \ln 3 = \ln 7$	Usando la tercera ley.
$x+2=\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$	Despejando $x + 2$.
$x=\dfrac{\ln 7}{\ln 3}-2\approx -0.22876$	Despejando x y usando una calculadora.

3. Resolver para x la ecuación $e^{3-2x} = 4$.

Procedemos de la misma manera que en los ejemplos anteriores.

$$e^{3-2x} = 4$$
$$\ln e^{3-2x} = \ln 4$$
$$(3 - 2x)\ln e = \ln 4$$
$$3 - 2x = \ln 4 \qquad \text{(porque } \ln e = 1\text{)}$$
$$-2x = \ln 4 - 3$$
$$x=\frac{\ln 4-3}{-2}=\frac{3-\ln 4}{2}\approx 0.807$$

4. Resolver para x la ecuación $\log_2 (25 - x) = 3$.

$\log_2 (25 - x) = 3$	
$25 - x = 2^3$	Definición de logaritmo.
$-x = 2^3 - 25$	Escribimos la ecuación en forma exponencial.
$x = 25 - 2^3 = 17$	Resolvemos para x.

Evidencias de aprendizaje

Encuentra la solución de las ecuaciones dadas y exprésalas con cuatro decimales.

Ecuación	Solución
1. $5^x = 16$	$x =$

Ecuación	Solución
2. $2^{1-x} = 3$	$x =$
3. $5^{-x/100} = 2$	$x =$
4. $\dfrac{50}{1+e^{-x}} = 4$	$x =$
5. $\ln x = 10$	$x =$
6. $\log(3x+5) = 2$	$x =$
7. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$	$x =$
8. $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$	$x =$

Aplicaciones

1. Se invierten \$10,000 a una tasa de interés del 8% anual, compuesto semestralmente. Determina el tiempo t necesario para que la suma de dinero invertido sea igual a \$14,800.

Solución:

Recordamos la fórmula de interés compuesto $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ con $A = 14800$, $P = 10000$, $r = 0.08$, $n = 2$ y resolvamos la ecuación exponencial.

$$14800 = 10000\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2t}$$

$1.48 = (1.04)^{2t}$	Dividimos entre 10,000 en ambos lados.
$\ln 1.48 = \ln(1.04)^{2t}$	Tomamos el logaritmo en ambos lados.
$\ln 1.48 = 2t\ln(1.04)$	Aplicamos la tercera ley.
$t = \dfrac{\ln 1.48}{2\ln(1.04)} \approx 5$ años	Resolvemos para t.

En aproximadamente 5 años es posible juntar 14,800 pesos con esa tasa de interés.

2. En el año 2000, la población de nuestro planeta se estimó en 6,500 millones de personas y la tasa relativa de crecimiento se estimó en 2% anual. Asumiendo que la población mundial sigue un modelo de crecimiento exponencial, ¿en cuánto tiempo la población llegará a ser 9,700 millones de personas?

Solución:
Utilizamos la fórmula de crecimiento exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ con $n(t) = 9700$, $n_0 = 6500$, $r = 0.02$, y resolvamos la ecuación exponencial.

$$9700 = 6500e^{0.02t}$$

$1.5 = e^{0.02t}$	Dividimos entre 6,500 en ambos lados.
$\ln(1.5) = \ln(e^{0.02t})$	Tomamos el logaritmo en ambos lados.
$\ln(1.5) = 0.02t\ln e$	Aplicamos la tercera ley.
$t = \dfrac{\ln 1.5}{0.02\ln e} \approx 20$ años	Resolvemos para t. (Recuerda que $\ln e = 1$).

En 20 años la población del planeta será aproximadamente de 9,700 millones de habitantes con esa tasa de crecimiento.

Evidencias de aprendizaje

1. Se invierten \$5,000 a una tasa de interés del 6%, compuesto semestralmente. Determina el tiempo *t* necesario para que el dinero invertido se duplique. Completa la secuencia para encontrar la respuesta.

A	*P*	*r*	*n*	Tiempo necesario *t*

2. Determina el tiempo necesario para que una inversión de 500 dólares crezca a 800 dólares a una tasa de interés de 4% anual compuesto trimestralmente.

A	*P*	*r*	*n*	Tiempo necesario *t*

3. Se invierte una suma de \$30,000 durante 4 años, y se calcula un interés compuesto semestral. Si la inversión alcanzó \$45,000 en el tiempo dado. ¿Cuál fue la tasa de interés?

A	*P*	*t*	*n*	Tasa de interés *r*

4. La población de cierta ciudad fue de 100,000 en 1994, y la tasa de crecimiento relativo observada es de 4% anual. ¿En qué año alcanzará la población el doble de habitantes?

$n(t)$	n_0	r	t

5. El número de peces que observa una especie está dado por la fórmula $n(t) = 12e^{0.012t}$, donde t se mide en años y $n(t)$ en millones.

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativo de la población de peces? Exprésalo en porcentaje.
b) ¿Cuál será la población de los peces en 5 años?
c) ¿En cuántos años la especie alcanzará el número de 30 millones de peces?

$n(t)$	n_0	r	Tiempo en que la especie será de 30 millones

6. La masa $m(t)$ que queda después de t días de una muestra $m_0 = 50$ gramos de una sustancia que se degrada exponencialmente está dada por

$$m(t) = 50e^{-0.027t}$$

a) ¿Cuánto quedará de la muestra después de 60 días?
b) ¿Después de cuántos días sólo quedarán 10 gramos de la muestra?

$m(t)$	m_0	r	Tiempo en que quedarán 10 gramos

7. Escala de Richter. En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter definió la magnitud de un terremoto como:

$$M = \log \frac{I}{S}$$

donde I es la intensidad del terremoto y S un terremoto estándar.

Terremoto de 1906 en San Francisco, Estados Unidos.

El terremoto que vivió la ciudad de San Francisco en 1906, tuvo una magnitud estimada en 8.3 en la escala de Richter. El mismo año ocurrió el terremoto más fuerte registrado jamás, en la frontera entre Colombia y Ecuador y fue 4 veces más intenso que el de San Francisco. Para averiguar cuál fue la magnitud del sismo entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter, utilizamos de esta forma los datos anteriores.

La magnitud del sismo de San Francisco es $M = \log \frac{I}{S} = 8.3$

La intensidad del sismo entre Colombia y Ecuador fue $4I$.
De manera que la magnitud de este terremoto fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 = 8.9$$

Ahora bien, si el terremoto que ocurrió en Alaska en 1964 tuvo una magnitud de 8.6 en la escala de Richter, ¿cuántas veces fue más intenso este terremoto que el de 1906 en San Francisco?

AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 7

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• identificar la forma de las funciones exponenciales (crecientes y decrecientes)?	
• reconocer la función exponencial natural (el número *e* crecimiento o decrecimiento en base *e*)?	
• interpretar algebraica y gráficamente la función logarítmica como la inversa de la función exponencial?	
• identificar las propiedades de los logaritmos (inherentes a su definición. Operativas)?	
• comprender las propiedades y técnicas de resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• explicar por qué una función exponencial es creciente o decreciente?	
• obtener el valor inicial y factor de crecimiento de una función exponencial?	
• utilizar la función exponencial natural para modelar situaciones que involucran al número *e*?	
• construir la función logarítmica como la inversa de la función exponencial?	
• operar con logaritmos y resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas?	
• reconocer situaciones que pueden modelarse mediante funciones exponenciales y logarítmicas y aplicar éstas para hallar su solución?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 0.9. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

BLOQUE 8

Funciones periódicas seno y coseno

Atardecer en el mar. Los fenómenos cíclicos o periódicos, como el movimiento de las olas, el sonido, el movimiento de un péndulo, el funcionamiento de un motor, etc., se pueden modelar con las funciones trigonométricas como el seno y el coseno.

Unidades de competencia

En este bloque se pretende que el alumno desarrolle las siguientes competencias:

- Construir e interpretar modelos periódicos, aplicando las propiedades de las funciones senoidales, para representar situaciones y resolver problemas teóricos o prácticos concernientes a su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.
- Contrastar los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos senoidales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.
- Interpretar tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a las funciones senoidales.

Conocimientos

Al finalizar este bloque, el alumno adquirirá los conocimientos que le permitirán:

- Comprender las funciones senoidales

$$y = A \operatorname{sen} Bx + C$$

$$y = A \cos Bx + C$$

- Definir la amplitud, el periodo, la frecuencia y la fase de una función senoidal.
- Reconocer e interpretar la gráfica de una función senoidal.

Habilidades

Al finalizar este bloque, el alumno habrá desarrollado las habilidades que le permitirán:

- Obtener casos particulares de funciones senoidales a partir de modelos generales.
- Determinar la amplitud, la fase, el periodo y la frecuencia de funciones senoidales particulares.
- Distinguir situaciones en las que es posible aplicar un modelo senoidal para su descripción y estudio.
- Aplicar las funciones senoidales en la resolución de problemas.

Actitudes y valores

Al finalizar el bloque, el alumno será competente para:

- Asumir una actitud de apertura que favorece la solución de problemas.
- Apreciar la utilidad de las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones, para simplificar procesos y obtener soluciones precisas.
- Presentar disposición al trabajo colaborativo con sus compañeros.
- Aportar puntos de vista personales con apertura y considerar los de otras personas.
- Reconocer sus errores en los procedimientos y mostrar disposición para solucionarlos.
- Actuar de manera propositiva al resolver los ejercicios planeados.
- Proponer maneras creativas de solucionar problemas matemáticos.
- Asumir una postura constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que se cuenta, dentro de distintos equipos de trabajo.

Indicadores de desempeño

Se pretende que el alumno logre:

- Describir la relación que existe entre las funciones trigonométricas y las funciones circulares seno y coseno, y las funciones senoidales.
- Argumentar la elección de una de las formas senoidales para modelar una situación o fenómeno específico.
- Obtener la amplitud y el periodo para graficar una función senoidal.
- Describir la relación entre periodo y frecuencia.

- Resolver o formular problemas de su entorno u otros ámbitos que pueden representarse mediante funciones senoidales.

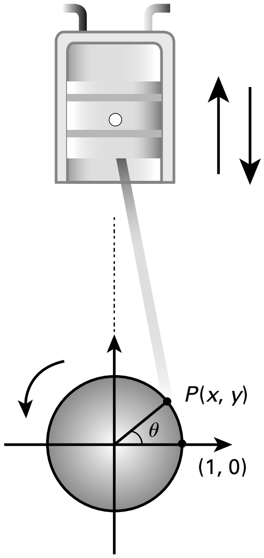
Evidencias de aprendizaje

- Describe el cambio en el dominio al pasar de función trigonométrica a circular y periódica.
- Distingue seno y coseno a partir del desfasamiento con respecto al eje *y*.
- Explica e interpreta geométricamente la amplitud y el periodo como contracciones o dilataciones verticales u horizontales de las gráficas circulares seno y coseno.
- Explica que el periodo es el recíproco de la frecuencia e ilustra la interpretación de cada uno con ejemplos de física.
- Utiliza la división en cuartos para ubicar en el periodo un ciclo completo de la gráfica.
- Aplica las propiedades y relaciones de las funciones senoidales para modelar y resolver problemas que conllevan la noción de periodicidad o ciclos que se repiten (mareas sonidos, etcétera).

Actividad de aprendizaje significativo

La figura describe el movimiento de un pistón sujeto a una rueda de radio 1 (círculo trigonométrico). Completa la tabla dada para calcular la posición vertical *y* del pistón después de un ciclo completo de la rueda para los valores sugeridos del ángulo θ y enseguida grafica los valores obtenidos en la tabla.

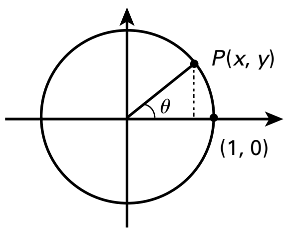
Sugerencia: antes de realizar la actividad recuerda los conceptos del círculo trigonométrico.



Círculo trigonométrico. Es un círculo cuyo radio es la unidad y que nos auxilia para determinar las coordenadas de un punto $P(x, y)$ desplazado un arco θ dado en radianes a partir del punto $P(1, 0)$.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1} \quad \text{entonces} \quad y = \operatorname{sen}\theta$$

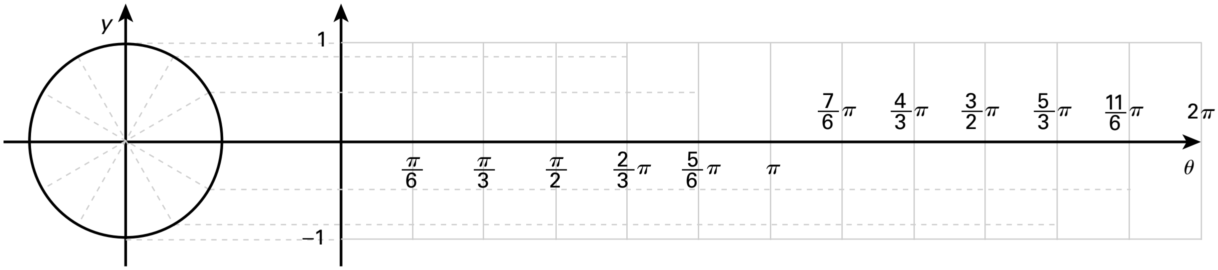
$$\cos\theta = \frac{x}{1} \quad \text{entonces} \quad x = \cos\theta$$



La equivalencia entre radianes y grados es;

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
y													



Secuencia didáctica

- ¿Cómo se llama la gráfica obtenida?

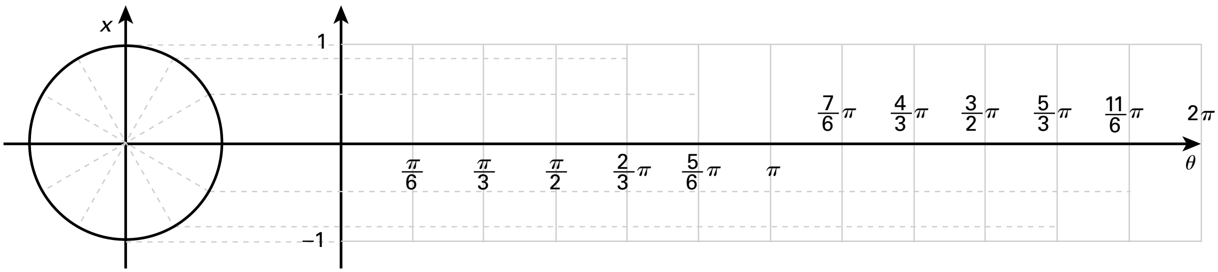
- ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función?

- Escribe el intervalo de variación de la función obtenida.

- ¿Qué va a ocurrir con la gráfica cuando $\theta > 2\pi$?

- Describe qué otros fenómenos físicos observan este comportamiento periódico.

- Obtén la gráfica correspondiente a la variación *x* de la rueda. ¿Cómo se llama la gráfica?



Gráficas de las funciones seno y coseno

Ya hemos estudiado en secciones anteriores que la gráfica de una función nos auxilia para tener una imagen más objetiva y comprensible del comportamiento de ésta. Con este fin, ahora vamos a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno y de algunas de sus transformaciones.

Para bosquejar las gráficas mencionadas debemos tener en mente el círculo unitario y que la posición de un punto $P(x, y)$ que se mueve sobre éste repite sus valores cada 2π radianes, es decir el desplazamiento es periódico, por tanto se concluye que dichos valores no cambian al sumar cualquier múltiplo entero n de 2π. Es decir, si θ es el desplazamiento angular

$$\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi) = \operatorname{sen}\,\theta$$

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\,\theta$$

Por tanto, las funciones seno y coseno son **periódicas**. Esto significa que si existe un número positivo p llamado **periodo** tal que $f(\theta + p) = f(\theta)$ para toda θ la función se repite cada periodo p.

Periodicidad del seno y coseno

La función seno repite sus valores en un periodo 2π:

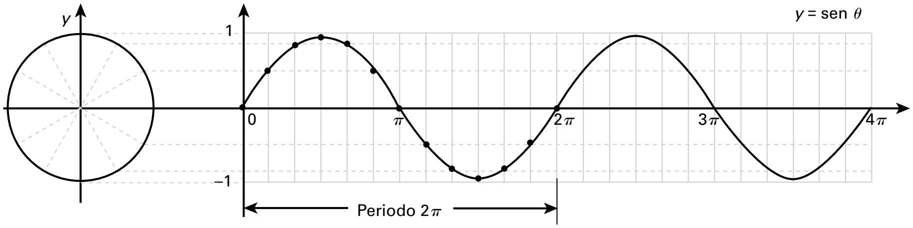
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\,\theta$$

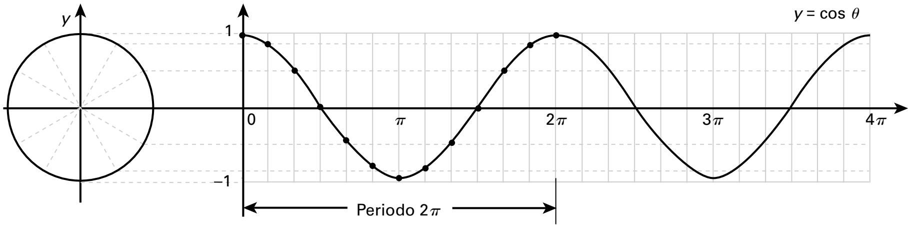
La función coseno repite sus valores en un periodo 2π:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\,\theta$$

Para trazar las gráficas del seno y coseno elaboramos una tabla como la siguiente y enseguida unimos con una línea suave los puntos obtenidos y de acuerdo a la propiedad de periodicidad que tienen con periodo 2π, obtenemos las gráficas completas continuando el mismo patrón a la derecha y a la izquierda para todo intervalo siguiente de tamaño 2π.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1





Transformaciones de las gráficas de seno y coseno

Ahora estudiemos cómo se transforman las gráficas ordinarias de las funciones seno y coseno. Estas gráficas son muy útiles en el tratado de situaciones físicas como la que vimos al inicio del tema.

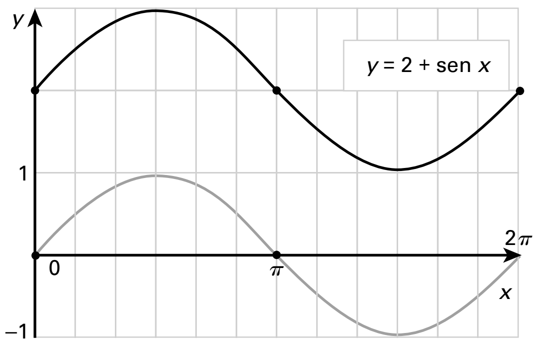
Ejemplos

Traza las gráficas de cada una de las funciones siguientes.

a) $y = 2 + \text{sen } x$ *b*) $y = -\cos x$ *c*) $y = 2 \text{ sen } x$ *d*) $y = \frac{1}{2} \text{sen } x$

Solución:

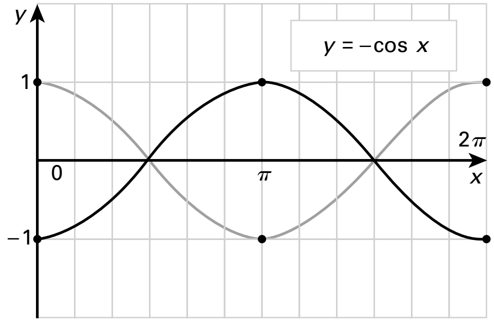
a) La gráfica de $y = 2 + \text{sen } x$ es igual que la función estándar de $y = \text{sen } x$, pero trasladada 2 unidades hacia arriba.



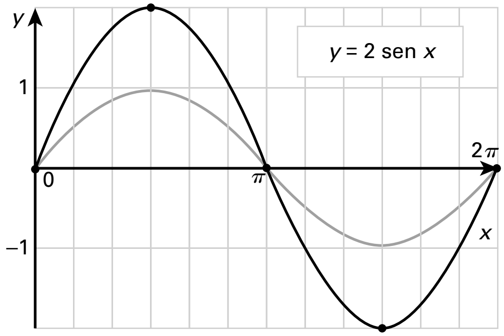
(*Continúa*)

(*Continuación*)

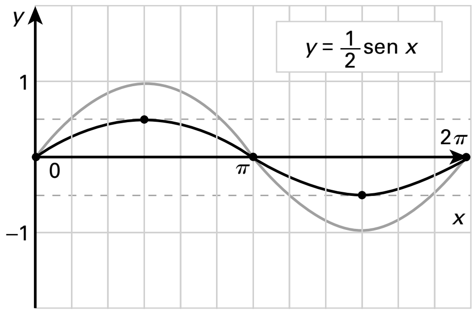
b) La gráfica de $y = -\cos x$ es la reflexión sobre el eje x de la función estándar de $y = \cos x$.



c) La gráfica de $y = 2$ sen x es un alargamiento vertical y se obtiene multiplicando la coordenada de cada punto por 2.



d) La gráfica de $y = \frac{1}{2}$ sen x es una contracción vertical por un factor de $\frac{1}{2}$.

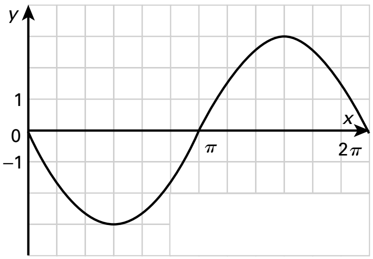


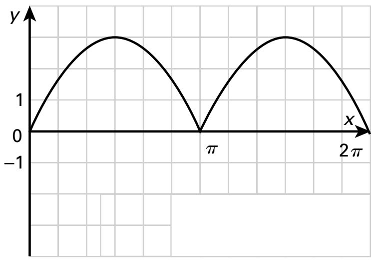
Evidencias de aprendizaje

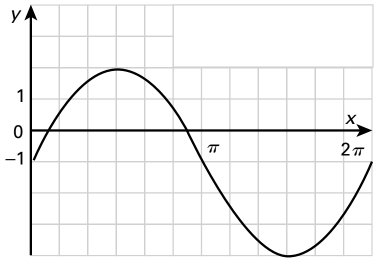
1. Escribe en el recuadro en blanco la ecuación que le corresponda a cada gráfica.

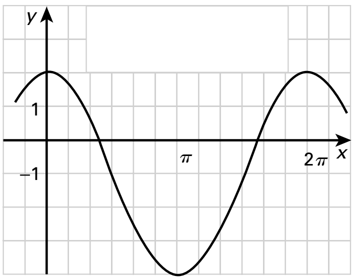
a) $y = 3|\text{sen } x|$ *b*) $y = -3 \text{ sen } x$ *c*) $y = -1 + 3 \text{ sen } x$

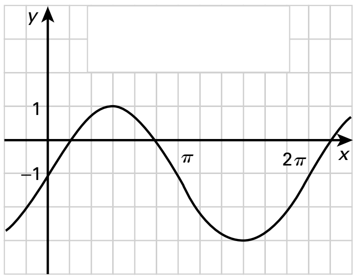
d) $y = -1 + 2 \text{ sen } x$ *e*) $y = -1 + 3 \cos x$ *f*) $y = 1 + 2 \cos x$

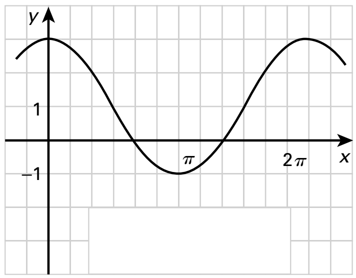






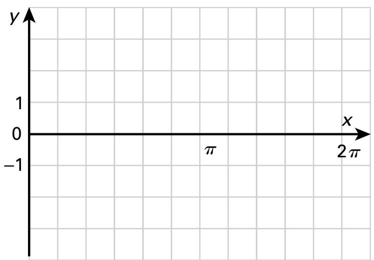


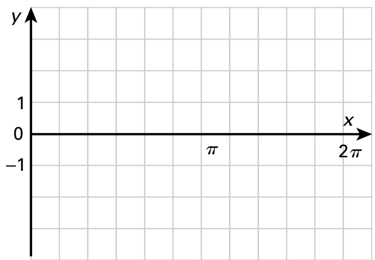


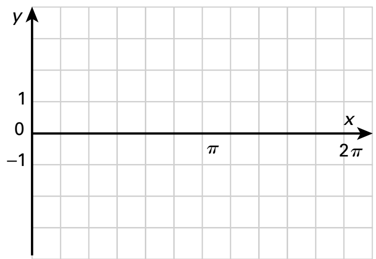


2. Traza la gráfica de cada función.

a) $y = 3|\cos x|$ *b*) $y = -3 \cos x$ *c*) $y = -1 + 3 \cos x$





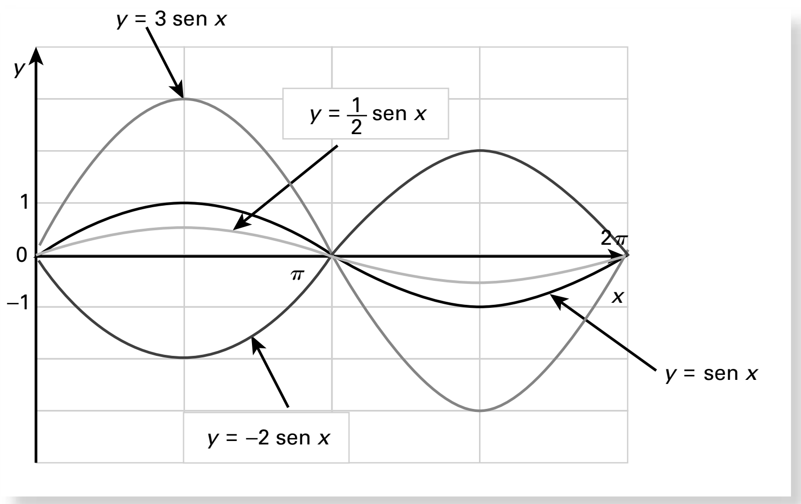


Amplitud de las funciones seno y coseno

En general para las funciones

$$y = A \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = A \cos x$$

El valor $|A|$ se conoce como la **amplitud** de la función y es el valor máximo que ésta puede tomar. Observa la figura que muestra las gráficas de $y = A$ sen x para diferentes valores de A.



Periodo de las funciones seno y coseno

Ya vimos que las funciones seno y coseno se repiten en un periodo de 2π, las funciones

$$y = A \text{ sen } kx \qquad \text{y} \qquad y = A \cos kx \qquad \text{para} \qquad k > 0$$

completan un periodo de acuerdo al intervalo $0 \leq kx \leq 2\pi$, o bien dividiendo la desigualdad entre k,

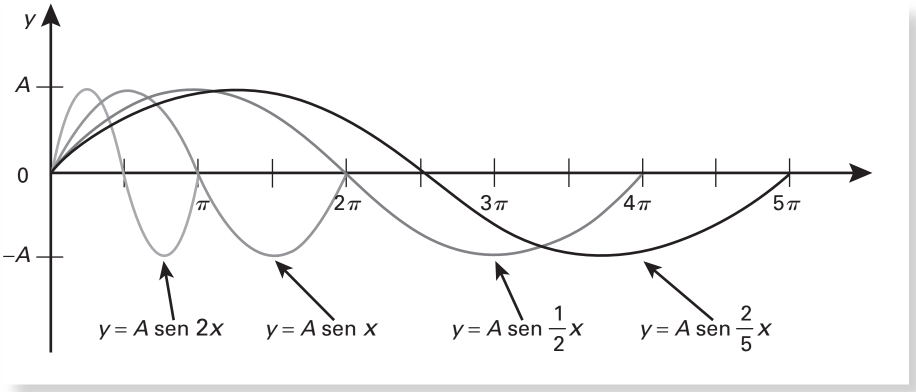
$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{k}.$$

Esto significa que las curvas tipo seno y las curvas tipo coseno completan un periodo conforme x toma valores entre 0 y $\dfrac{2\pi}{k}$.

Amplitud y periodo de las curvas tipo seno y tipo coseno

Las curvas $y = A$ sen kx y $y = A$ cos kx para $k > 0$ tienen una amplitud $|A|$ y un periodo $\frac{2\pi}{k}$.

Para una mejor comprensión observa las gráficas de un periodo de la función $y = A$ sen kx para diferentes valores de k.



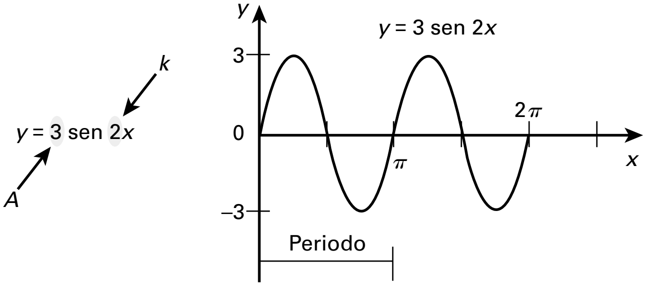
Ejemplos:

1. Determina la amplitud y el periodo de cada una de las funciones siguientes, y traza su gráfica.

a) $y = 3$ sen $2x$ *b*) $y = -2$ sen $\frac{1}{3}x$

Solución:

a) La función es $y = 3$ sen $2x$, tiene amplitud $|A| = 3$ y periodo $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

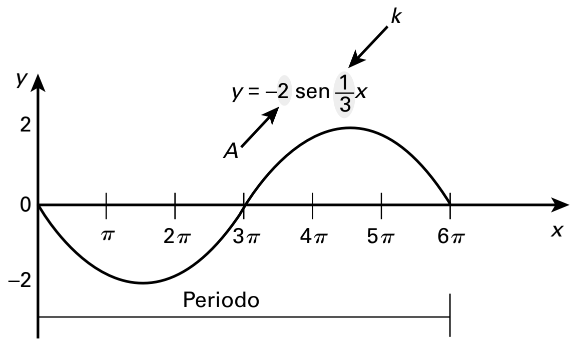


(*Continúa*)

(*Continuación*)

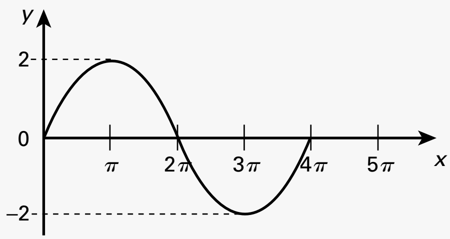
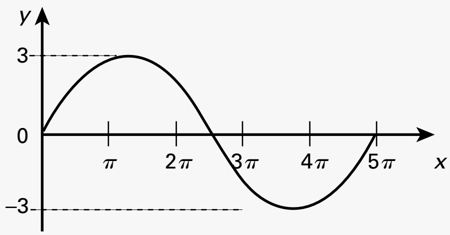
b) La función es $y = -2 \text{ sen } \dfrac{1}{3}x$, tiene amplitud $|A| = |-2| = 2$

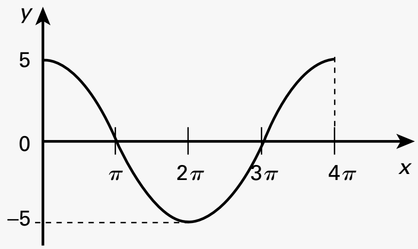
y periodo $= \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.



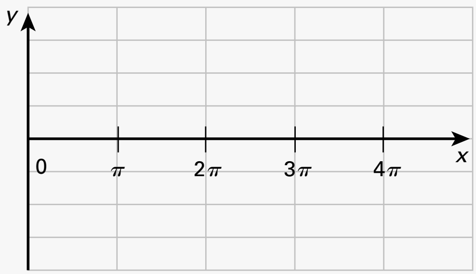
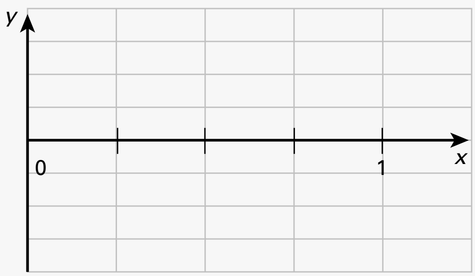
Evidencias de aprendizaje

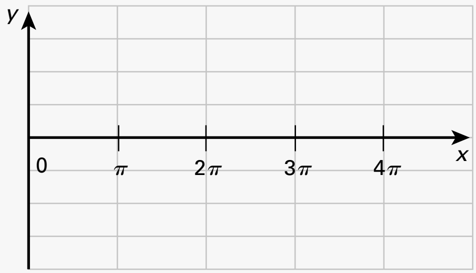
1. Determina la amplitud, el periodo y la ecuación de la gráfica dada.

Gráfica	Amplitud	Periodo	Ecuación
a) 			
b) 			

c) 			

2. Determina la amplitud, el periodo y traza la gráfica de la función dada.

Gráfica	Amplitud	Periodo	Ecuación
a) $y = -3\cos\frac{1}{2}x$ 			
b) $y = 3\cos 2\pi x$ 			

c) $y = -3 \operatorname{sen} \frac{2}{3}x$ 			

Traslaciones horizontales de senos y cosenos

Las gráficas de funciones de la forma $y = A \operatorname{sen} k(x + b)$ y $y = A \cos k(x + b)$ son curvas trasladadas horizontalmente de la siguiente forma: si $b < 0$ la traslación es a la derecha b unidades, si $b > 0$ la traslación es a la izquierda b unidades.

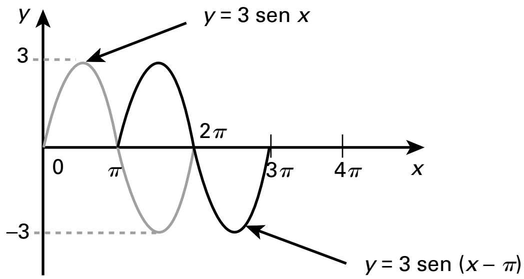
> **Traslaciones horizontales de senos y cosenos**
>
> Las curvas $y = A \operatorname{sen} k(x + b)$ y $y = A \cos k(x + b)$ para $k > 0$ tienen una amplitud $|A|$, un periodo $\frac{2\pi}{k}$, y un **corrimiento de fase** b a la derecha o a la izquierda según b sea menor o mayor a cero respectivamente.

Ejemplos:

1. Determina la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de $y = 3 \operatorname{sen}(x - \pi)$ y traza la gráfica.

Solución:

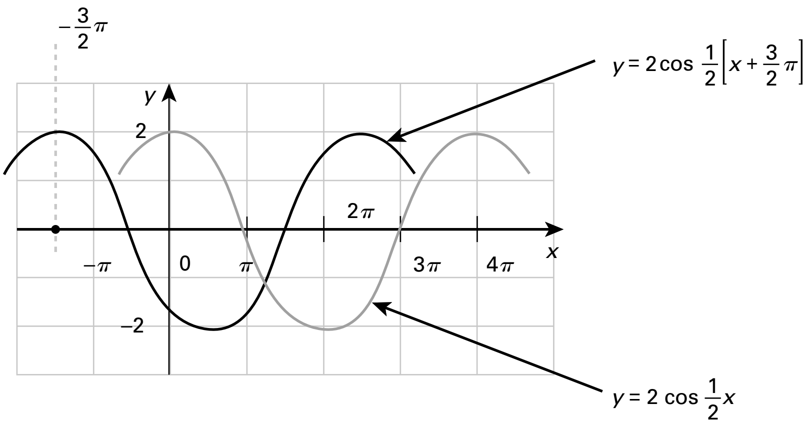
La amplitud es $|A| = |3| = 3$, el periodo es $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ y como $b = -\pi$, entonces el corrimiento de fase es π unidades a la derecha.



2. Determina la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de $y = 2\cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$ y traza la gráfica.

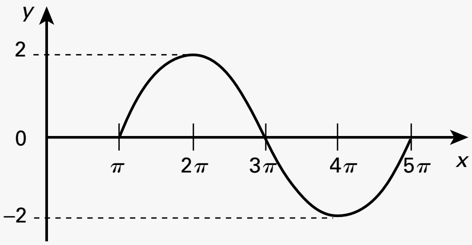
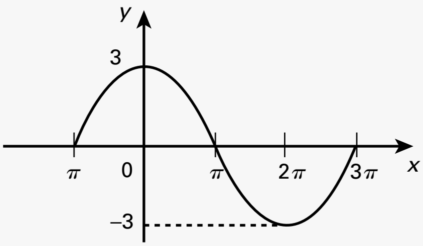
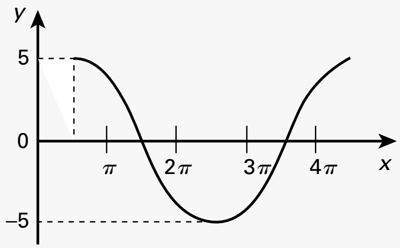
Solución:

La amplitud es $|A| = |2| = 2$, el periodo es $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ y como $b = \frac{3}{2}\pi$, entonces el corrimiento de fase es $\frac{5}{2}\pi$ unidades a la izquierda.

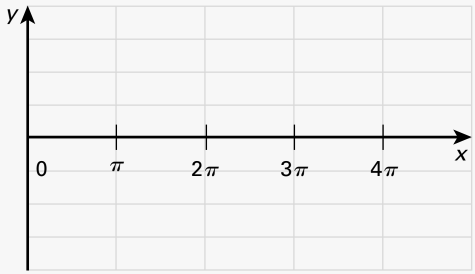
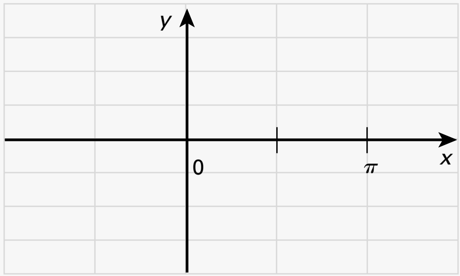
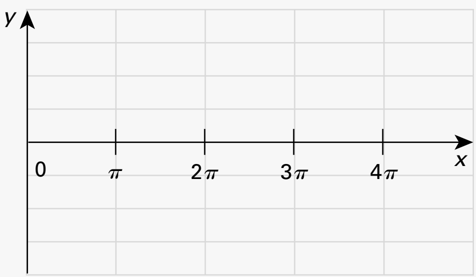


Evidencias de aprendizaje

1. Determina la amplitud, el periodo, la ecuación y el corrimiento de fase de la gráfica dada.

Gráfica	Amplitud	Periodo	Corrimiento
a)  Ecuación			
b)  Ecuación			
c)  Ecuación			

2. Determina la amplitud, el periodo, y el corrimiento de la función y traza la gráfica de un periodo.

Gráfica	Amplitud	Periodo	Corrimiento
a) $y = -3\cos(x - \pi)$ 			
b) $y = 3\,\text{sen}\,2\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$ 			
c) $y = -3\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)$ 			

Frecuencia de las funciones seno y coseno

La frecuencia de las funciones seno y coseno es el recíproco de su periodo y se mide en ciclos por unidad de tiempo. Esto significa que si el periodo se calcula con $\frac{2\pi}{k}$ entonces la frecuencia es:

Frecuencia $= \frac{k}{2\pi}$ ciclos por unidad de tiempo

Aplicación. Resorte en vibración

El desplazamiento de la masa suspendida en un resorte como el de la figura está dado por

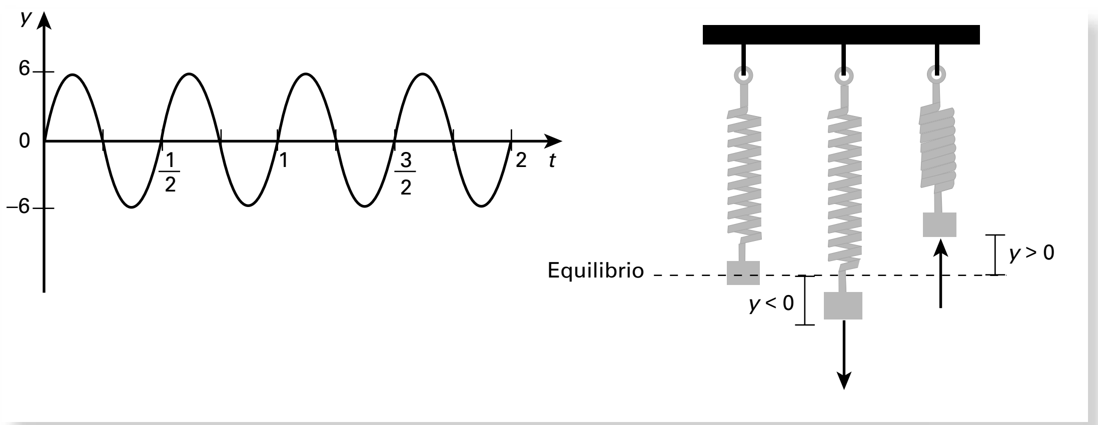
$$y = 6 \text{ sen } 4\pi t$$

donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Determina la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento del resorte.

Solución:
Este tipo de fenómeno en física se conoce como *movimiento armónico simple* y la amplitud, periodo y frecuencia son

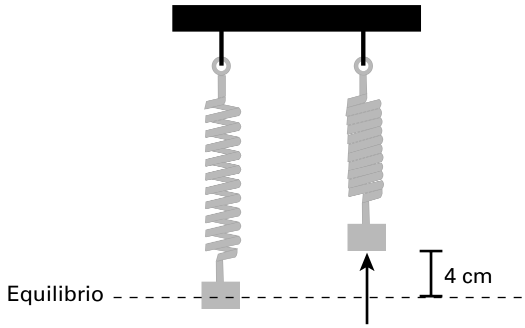
Amplitud $= |A| = |6| = 6.$ Periodo $= \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ segundos.

Frecuencia $= \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ ciclos por segundo.



Evidencias de aprendizaje

1. Una masa está suspendida de un resorte como se muestra en la figura. El resorte se comprime una distancia de 4 cm y luego se libera. La masa regresa al punto comprimido después de $\frac{1}{2}$ segundo. Si el movimiento de la masa está dado por la ecuación $y = 4 \cos k\, t$. Determina la ecuación del movimiento, la amplitud y la frecuencia.



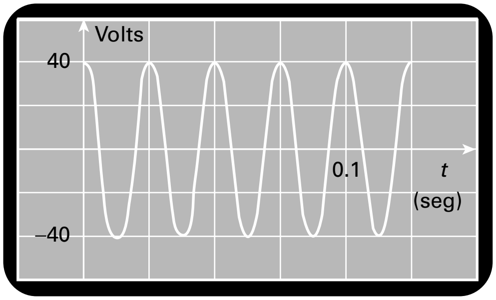
2. Un músico con su tuba musical produce un sonido que se conoce como *un mi puro*, y está dado por la ecuación

$$V(t) = 0.2 \text{ sen } 80\pi\, t$$

donde $V(t)$ es la variación de presión de la presión normal en el tiempo t medida en libras por pulgada cuadrada. Determina la amplitud, el periodo y la frecuencia del sonido. Si el músico incrementa el volumen de la nota. ¿Qué ocurre con la amplitud de la gráfica?

3. La gráfica muestra la lectura de un osciloscopio de la variación del voltaje de una corriente alterna producida por un generador simple.

a) Determina el voltaje máximo.
b) Determina la frecuencia (ciclos por segundo) del generador.
c) Calcula el número de revoluciones por segundo del generador.
d) Escribe una fórmula que describa la variación del voltaje como una función del tiempo.



AUTOEVALUACIÓN PARA EL BLOQUE 8

Considera tu desempeño como estudiante e indica la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anotando en el cuadro el número correspondiente.

0 Nunca **5** Algunas veces **10** Siempre

CONOCIMIENTOS	
Después de estudiar el bloque, ¿adquiriste los conocimientos que te permiten	
• comprender las funciones trigonométricas seno y coseno?	
• definir la amplitud, el periodo, la frecuencia y la fase de una función senoidal?	
• reconocer e interpretar la gráfica de una función senoidal?	

HABILIDADES	
Al finalizar el bloque, ¿desarrollaste las habilidades que te permiten	
• obtener casos particulares de funciones senoidales a partir de modelos generales?	
• determinar la amplitud, la fase, el periodo y la frecuencia de funciones senoidales particulares?	
• distinguir situaciones en las que es posible aplicar un modelo senoidal para su descripción y estudio?	
• aplicar las funciones senoidales en la resolución de problemas?	

CALIFICACIÓN. Cuenta el total de puntos que obtuviste en ambas tablas y multiplica por 1.4. El resultado se interpreta de acuerdo con las siguientes categorías:

Menos de 59	60 a 69	70 a 79	80 a 89	90 a 100
Deficiente	**Regular**	**Bien**	**Muy bien**	**Excelente**

Para autoevaluarte con respecto a las **actitudes** y **valores**, reflexiona sobre el *valor* que agregaste a tu formación educativa, desarrollo personal e interacción con los demás y con el medio ambiente al estudiar el tema.

Registro personal de avance y aprovechamiento

Nombre del alumno: ______________________________

Grupo: ____________ **Turno:** ____________

Actividad	Valor	Porcentajes por bloque								Calificaciones		
		B-1	B-2	B-3	B-4	B-5	B-6	B-7	B-8	Parciales		Final
Tareas												
Trabajo colaborativo												
Autoevaluación y coevaluación												
Exámenes objetivos												
Total	**100%**											

Soluciones

Bloque 1, página 12.

1. *b*) $f(x)=\sqrt{x+2}$, *c*) Multiplicar por 2, sumar 1 y extraer raíz cúbica a todo, *d*) $f(x)=9-x^2$,
e) Multiplicar por 2, restar 1 y extraer raíz cuadrada a todo, *f*) $f(x)=2x-x^2$,
g) Elevar a la cuarta potencia y restar de 1, *h*) $f(x)=2x^2+3$, *i*) Dividir entre 3 y restar 5,
j) $f(x)=\sqrt[4]{7-3x}$.

3. *a*) $A(x)=8x-x^2$, *b*) $A(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$, *c*) $A(V)=6\sqrt[3]{V^2}$

Bloque 1, página 17.

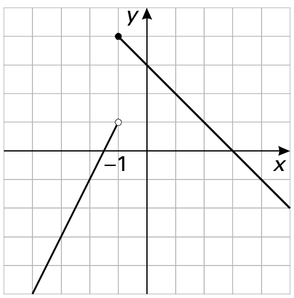
1. Primera gráfica: sí es función, *dominio*: $-3\le x\le 2$, *rango*: $-1.2\le f(x)\le 2$.
Segunda gráfica: no es función, *dominio*: $-2\le x\le 2$, *rango*: $-2\le f(x)\le 2$.
Tercera gráfica: no es función, *dominio*: $-3\le x\le 2$, *rango*: $-3\le f(x)\le 2$.
Cuarta gráfica: sí es función, *dominio*: $-3\le x\le 2$, *rango*: $-2< f(x)\le 2.5$.

3. Primera gráfica: *dominio*: $-\infty<x<\infty$.
Segunda gráfica: *dominio*: $-3\le x\le 3$.
Tercera gráfica: *dominio*: $-\infty<x<\infty$.
Cuarta gráfica: *dominio*: $-\infty<x<\infty$; $x\ne\pm 2$.

Bloque 1, página 19.

1.
$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x<0\\ x & \text{si} \quad 0\le x\le 2\\ 2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

3.



Bloque 1, página 26.

1. $f(0)=0,\quad f(2)=4,\quad f(4)=0$

Dominio: $-\infty < x < \infty$

Intervalos de crecimiento: $-\infty < x < 2$.

Intervalos donde decrece: $2 < x < \infty$.

3. $f(-1)=2,\quad f(0)=0,\quad f(1)=-2$

Dominio: $-\infty < x < \infty$

Intervalos de crecimiento: $\begin{cases} -\infty < x < -1 \\ 1 < x < \infty \end{cases}$.

Intervalos donde decrece: $-1 < x < 1$.

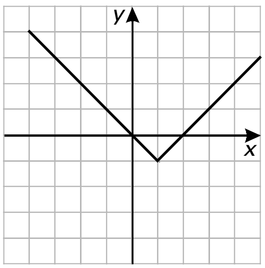
Bloque 2, página 38.

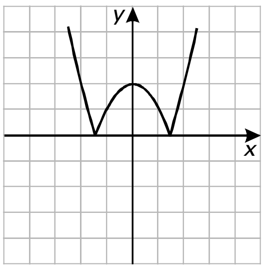
1. $f^{-1}(1)=0$, $f^{-1}(2)=-1$ y $f^{-1}(5)=-2$

3. $C=\dfrac{5}{9}(F-32)$

Bloque 2, página 42.

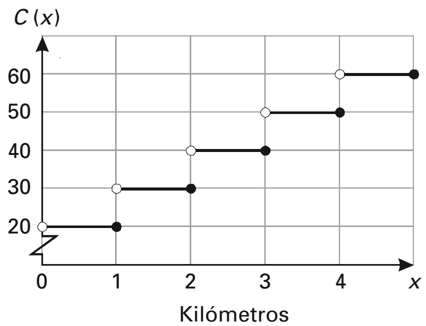
1. *a*) $f(x)=|x-1|-1$ *b*) $g(x)=|x^2-2|$





3.

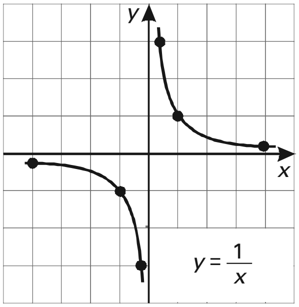
$$C(x)=\begin{cases} 20 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 30 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ 40 & \text{si} \quad 2 < x \le 3 \\ 50 & \text{si} \quad 3 < x \le 4 \\ 60 & \text{si} \quad 4 < x \le 5 \end{cases}$$

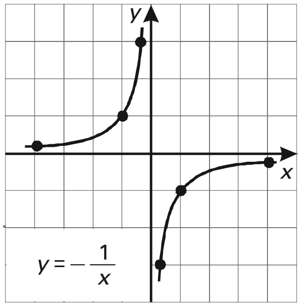


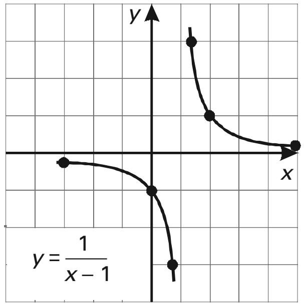
Bloque 2, página 47.

1. $y=\sqrt{x^2+1}-3$, $y=\sqrt{(x-3)^2+1}$, $y=-\sqrt{x^2+1}$, $y=\sqrt{(x+1)^2+1}-2$, $y=2\sqrt{x^2+1}$

3.







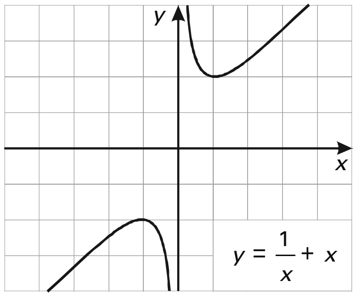
5. $y=|x|-1$, $y=\left||x|-1\right|$.

Bloque 2, página 52.

1.

Operación	Función resultante	Dominio
$f+g$	x^3+x^2+2x-1	$-\infty<x<\infty$
$f-g$	x^3-x^2+2x+1	$-\infty<x<\infty$
fg	x^5+x^3-2x	$-\infty<x<\infty$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{x^3+2x}{x^2-1}$	$-\infty<x<\infty$; $x\neq\pm1$

3.

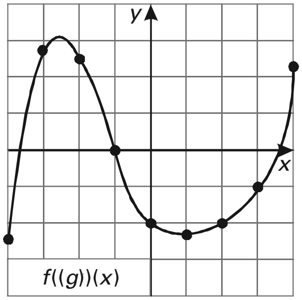


Bloque 2, página 55.

1.

$f(x)$	$g(x)$	$(f\circ g)(x)$	$(g\circ f)(x)$	$(f\circ f)(x)$	$(g\circ g)(x)$
$2-x$	$3x+2$	$-3x$	$8-3x$	x	$9x+8$
x^2	$\sqrt{1-x}$	$1-x$	$\sqrt{1-x^2}$	x^4	$\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

3.



5. $A = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{(6-x)^2}{16}$

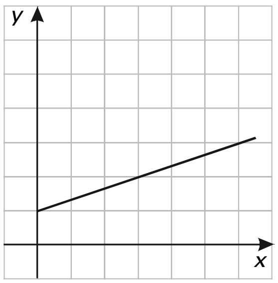
Bloque 2, página 56.

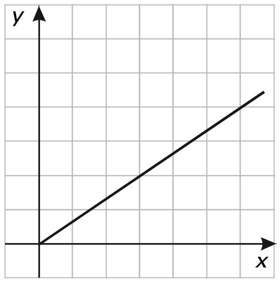
1. *a*) $d = vt = 360t$ *b*) $s^2 = (1.6)^2 + d^2$ *c*) $s^2 = (1.6)^2 + (360t)^2$ **3.** $V = \dfrac{4}{3}\pi\, v^3t^3$

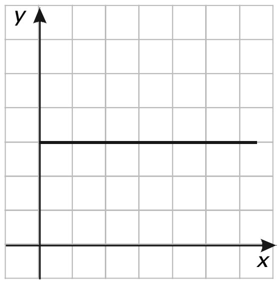
Bloque 3, página 66.

1. $m = \dfrac{2}{5}$ y $b = 2$; $m = -\dfrac{6}{5}$ y $b = 6$; $m = 0$ y $b = 4$.

3. *a*) $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 1$ *b*) $y = \dfrac{2}{3}x$ *c*) $k(x) = 3$

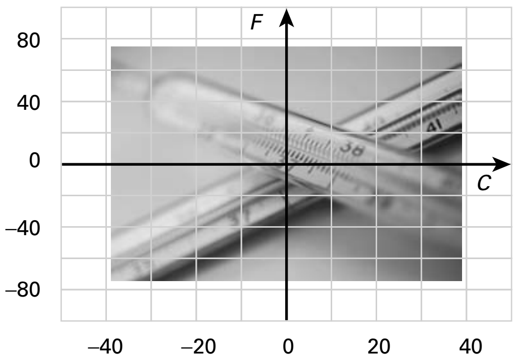






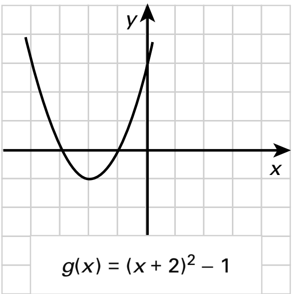
5. *b*) $T = -40$

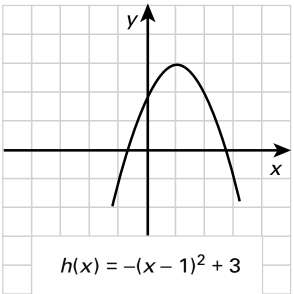
C	F
–30°	–22°
–20°	–4°
–10°	14°
0°	32°
10°	50°
20°	68°
30°	86°

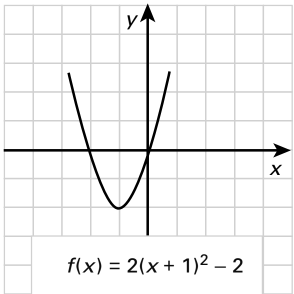


Bloque 3, página 74.

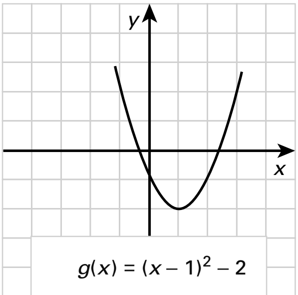
1.

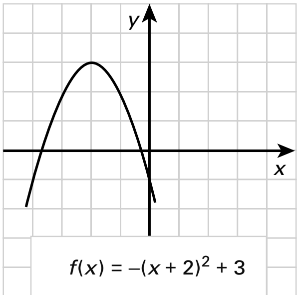


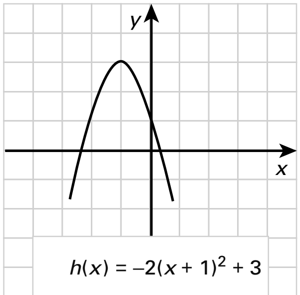




3.







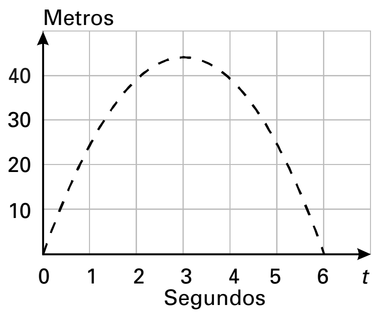
Bloque 3, página 77.

1. $f(x) = (x+2)^2 - 3$, Mínimo (–2, –3)

3. $h(x) = -2(x+1)^2 + 3$, Máximo (–1, 3)

Bloque 3, página 80.

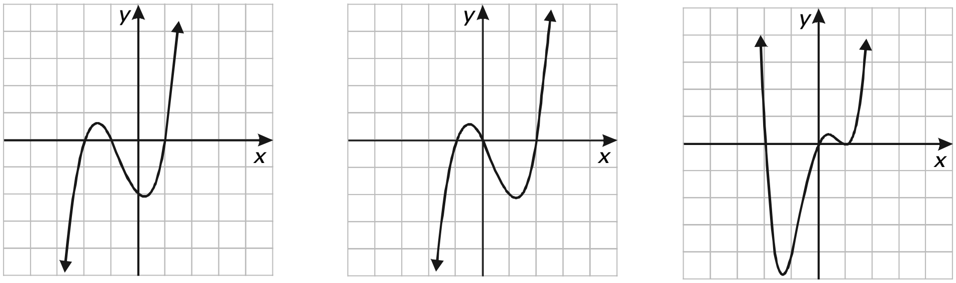
1. *a*) $x = 55$; $y = 55$. **3.** $h(t) = 44.1$ metros **5.** $x = 20$ artículos.



Bloque 4, página 92.

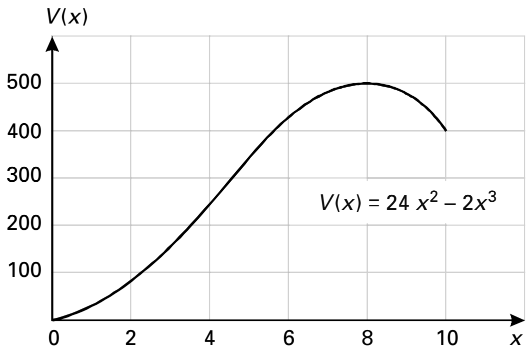
1. $y=(x+3)^3-1$, $y=(x-2)^3-1$, $y=(x+3)^4$, $y=-x^4+3$

3.



a) $\begin{cases} y\to-\infty \text{ si } x\to-\infty \\ y\to+\infty \text{ si } x\to+\infty \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} y\to-\infty \text{ si } x\to-\infty \\ y\to+\infty \text{ si } x\to+\infty \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} y\to+\infty \text{ si } x\to-\infty \\ y\to+\infty \text{ si } x\to+\infty \end{cases}$

5.



7. $V(x)=4x(10-x)(20-x)$

Bloque 5, página 106.

1. *a*) $P(2)=8$ *b*) $P(1)=-3$, *c*) $P(-3)=-197$, *d*) $P(-1)=-2$, *e*) $P(-2)=7$

3. *a*) $P(x)=(x+3)(x+1)(x-1)$, *b*) $P(x)=x(x+1)(x-3)(x-1)$,
c) $P(x)=x(x+2)(x-3)$, *d*) $P(x)=x(x+3)(x+1)(x-2)$.

Bloque 5, página 108.

1. $x^2+4x+10+\dfrac{21}{x-2}$ **3.** $x^3+x^2+4x+7+\dfrac{14}{x-2}$

Bloque 5, página 112.

1. $\frac{p}{q} = \pm 1, \quad \pm 3$ $\qquad P(x) = (x+3)(x-1)(x+1)$

3. $\frac{p}{q} = \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4$ $\qquad P(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

5. $\frac{p}{q} = \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 4$ $\qquad P(x) = (x-2)(x-1)^2(x+2)$

Bloque 5, página 117.

Ejercicio 3

1. $x = \pm 3i$, **3.** $x = \pm \frac{3}{2} i$, **5.** $x = \pm 1, \quad \pm i$, **7.** $x = -2, \quad 1 \pm \sqrt{3i}$, **9.** $x = \pm\sqrt{-2i}, \quad \pm\sqrt{2i}$.

Bloque 6, página 129.

1a

Intersecciones con x	Intersecciones con y	Asíntotas verticales	Asíntotas horizontales
$x = 2$	$y = -2$	$x = 1$	$y = -1$

1b

Intersecciones con x	Intersecciones con y	Asíntotas verticales	Asíntotas horizontales
$x = -\frac{1}{2}$	$y = 1$	$x = -1$	$y = 2$

1c

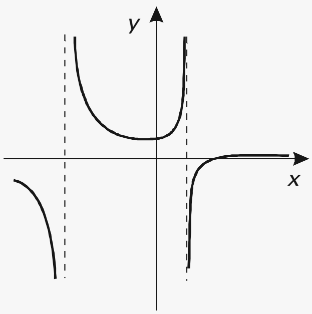
Intersecciones con x	Intersecciones con y	Asíntotas verticales	Asíntotas horizontales
$x = 0$	$y = 0$	$x = -2$, $x = 3$	$y = 1$

1d

Intersecciones con x	Intersecciones con y	Asíntotas verticales	Asíntotas horizontales
$x = -2, \ x = 2$	$y = 4$	$x = -1$, $x = 1$	$y = 1$

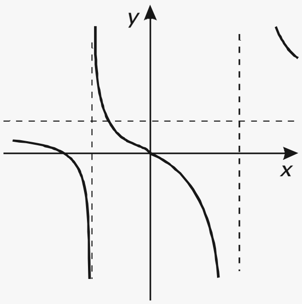
3a

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+3)(x-1)}$$



Intersecciones con el eje x $x = 2$
Intersecciones con el eje y $y = \frac{2}{3}$
Asíntotas verticales $x = -3$, $x = 1$
Asíntotas horizontales $y = 0$

3b

$f(x)=\dfrac{x(x+3)}{(x-3)(x+2)}$ 	Intersecciones con el eje x $x=-3,\ x=0$
	Intersecciones con el eje y $y=0$
	Asíntotas verticales $x=-2,\ x=3$
	Asíntotas horizontales $y=1$

Bloque 6, página 134.

1a

Intersecciones con x	Intersecciones con y	Asíntotas verticales	Asíntota inclinada
$x=-2,\ x=2$	$y=4$	$x=1$	$y=x+1$

1b

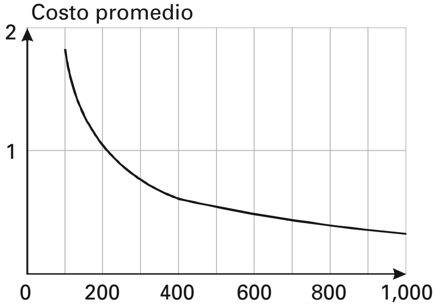
Intersecciones con x	Intersecciones con y	Asíntotas verticales	Asíntota inclinada
$x=0$	$y=0$	$x=1$	$y=x+1$

1c

Intersecciones con x	Intersecciones con y	Asíntotas verticales	Asíntota inclinada
$x=0$	$y=0$	$x=-1,\ x=1$	$y=x$

Aplicación 1.

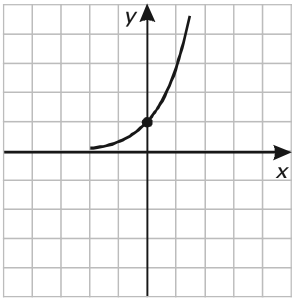
Costo promedio = 0.26 dólares



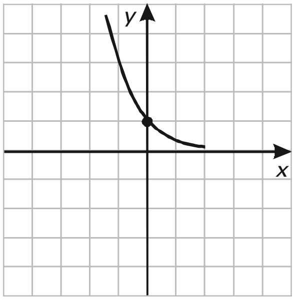
Bloque 7, página 145.

1. $a = 3$ y $x = 2$, por tanto $f(x) = 3^x$; $a = \frac{1}{2}$ y $x = -2$, por tanto $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

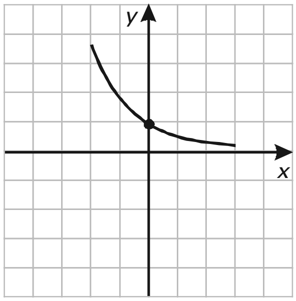
3a



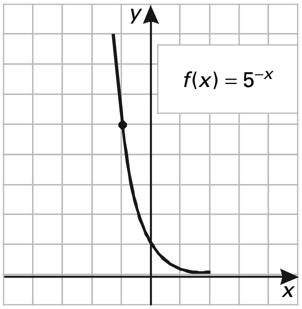
3b

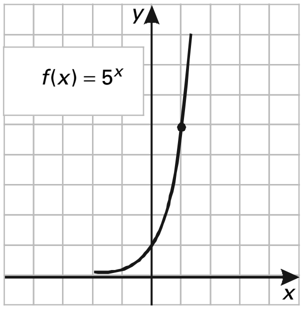


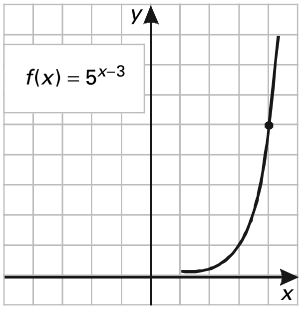
3c



5.







Bloque 7, página 153.

1.

Periodo de composición	Tasa	*n*	Valor de la inversión después de 5 años
Semestral	8%	2	$A = 10,000(1 + \frac{.08}{2})^{(2)(5)} \approx \$14,80245$

3.

Número de años (*t*)	*n*	Valor del préstamo al final de *t* años
4	2	$51,545.60
5	2	$59,014.50
10	2	$116,090.50

5. $4,915.85 por mes con la mejor inversión.

Bloque 7, página 155.

1. La tasa de 11.5% calculado semestralmente. **3.** $P \approx \$83{,}527$.

Bloque 7, página 157.

1. *a*) $r = 0.5$, *b*) $n_0 = 500$, *c*) Aproximadamente 2,241 bacterias.

3. Aproximadamente 7,920 millones. **5.** Aproximadamente 9,110 venados.

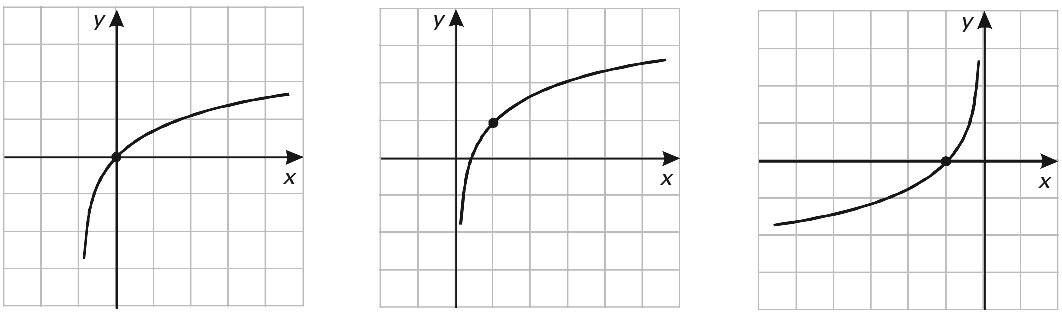
Bloque 7, página 162.

1 *a*) $2^4 = 16$, *b*) $3^4 = 81$, *c*) $4^{\frac{1}{2}} = 2$, *d*) $e^x = 6$, *e*) $e^2 = x - 1$, *f*) $e^3 = u$.

3. *a*) $x = 16$, *b*) $x = 100$, *c*) $x = 2$, *d*) $x = 36$, *e*) $x = e$, *f*) $x = 27$.

5. *a*) $x > -\frac{2}{3}$, *b*) $x < -1$, $x > 1$, *c*) $x > 1$, *d*) $x < 2$,

7. *a*) *b*) *c*)



Bloque 7, página 167.

1. $x \approx 1.7227$, **3.** $x \approx -43.0676$, **5.** $x \approx 31.7$, **7.** $x = -2$, $x = 3$,

Bloque 7, página 170.

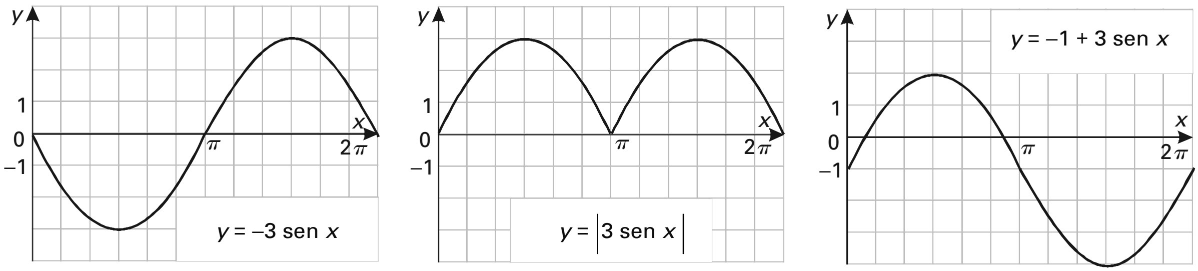
1. El dinero se duplicará en 11.73 años. **3.** La tasa de interés fue de 10.39%.

5. *a*) $r = 1.2\%$, *b*) $n(5) = 12.742039$ millones de peces, *c*) $t = 652$ años.

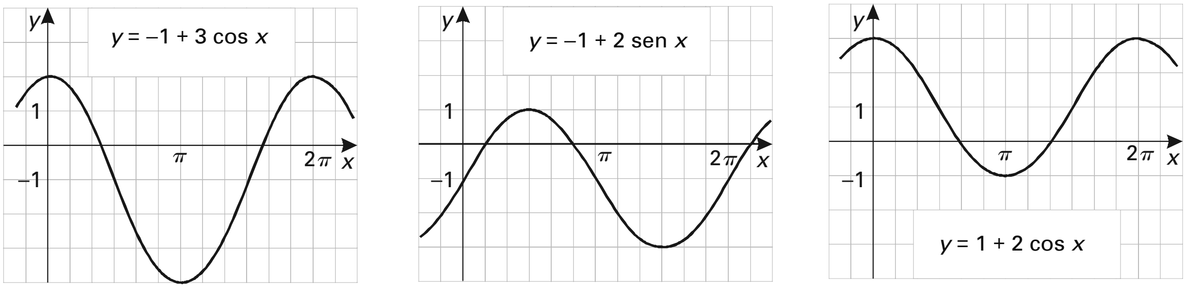
7. Aproximadamente fue 2 veces más intenso.

Bloque 8, página 183.

1.



5.



Bloque 8, página 186.

1. Primera gráfica: $Amplitud = 2$, $Periodo = 4\pi$, $y = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}x$.

Segunda gráfica: $Amplitud = 3$, $Periodo = 5\pi$, $y = 3\,\text{sen}\,\frac{2}{5}x$.

Tercera gráfica: $Amplitud = 5$, $Periodo = 4\pi$, $y = 5\cos\frac{1}{2}x$.

Bloque 8, página 189.

1. Primera gráfica: $Amplitud = 2$, $Periodo = 4\pi$, el corrimiento de fase es π unidades a la derecha.

Segunda gráfica: $Amplitud = 3$, $Periodo = 4\pi$, el corrimiento de fase es π unidades a la izquierda.

Tercera gráfica: $Amplitud = 5$, $Periodo = 4\pi$, el corrimiento de fase es $\frac{\pi}{2}$ unidades a la derecha.

Bloque 8, página 193.

1. $y = 4 \cos 4\pi t$, *Amplitud* = 4, *Frecuencia* = 2

3. *a*) 40 volts, *b*) *Frecuencia* = 40 ciclos por segundo,
c) 40 revoluciones por segundo, *d*) $y = 40 \cos 80\pi t$.

Fórmulas matemáticas

ÁLGEBRA

OPERACIONES ARITMÉTICAS			
$a(b+c) = ab + ac$	$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$	$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$	$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

EXPONENTES Y RADICALES			
$a^m\, a^n = a^{mn}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
$(ab)^n = a^n\, b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$		$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

FACTORIZACIONES ESPECIALES		
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

PRODUCTOS NOTABLES	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Teorema del Binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1}b^n$$

donde $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ y $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$

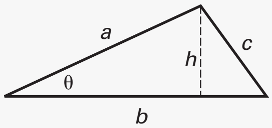
FÓRMULA CUADRÁTICA	VALOR ABSOLUTO
Si $ax^2 + bx + c = 0$, la solución para x es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Para toda $a > 0$, entonces $\lvert x\rvert = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$ $\lvert x\rvert < a$ significa que $-a < x < a$ $\lvert x\rvert > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$

GEOMETRÍA BÁSICA

FIGURAS GEOMÉTRICAS ELEMENTALES

Triángulos

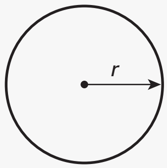
$\text{Área} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta$



Círculos

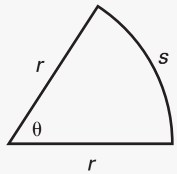
$\text{Área} = \pi r^2$

$\text{Perímetro} = 2\pi r$



Sector de círculos

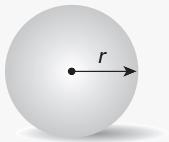
$\text{Área} = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$



Esfera

$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$

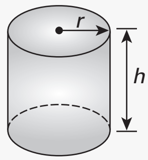
$\text{Área} = 4\pi r^2$



Cilindro

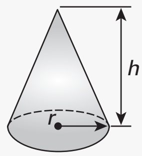
$\text{Área} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$\text{Volumen} = \pi r^2 h$



Cono

$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

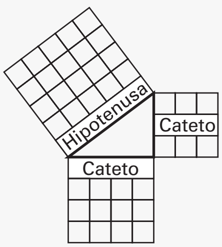


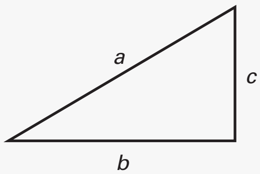
TRIGONOMETRÍA

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2 \qquad b^2 + c^2 = a^2$

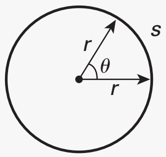




SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

$180° = \pi$ radianes

$s = r\theta$ (θ medido en radianes)

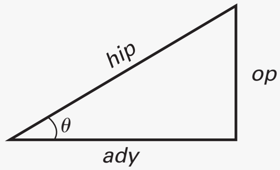


DEFINICIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot \theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad \csc \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$



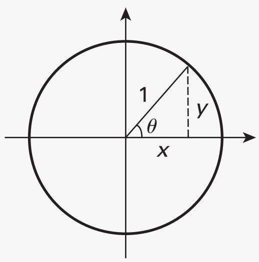
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

$x^2 + y^2 = 1$

$\text{sen } \theta = \dfrac{y}{1} = y$

$\cos \theta = \dfrac{x}{1} = x$

$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$



LEYES DE SENOS Y COSENOS

Ley de senos. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

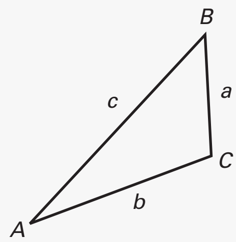
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Ley de cosenos. El coseno de un ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman menos el cuadrado del lado opuesto, todo dividido entre dos veces el producto de los lados que lo forman

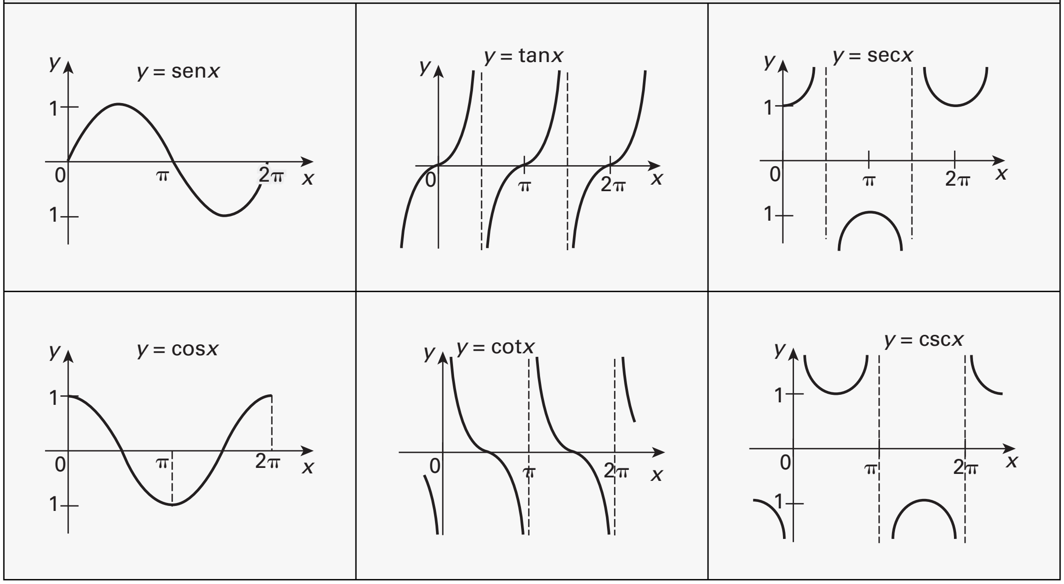
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	$\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	
$\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$	$\csc^2\theta = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta$	$\operatorname{sen}\theta = \cos(90° - \theta)$	
$\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$	$\tan\theta = \operatorname{ctg}(90° - \theta)$	$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

FÓRMULAS DE ÁNGULOS DOBLES

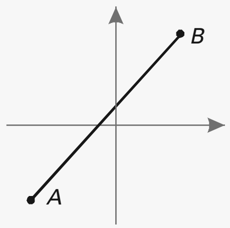
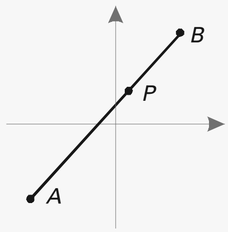
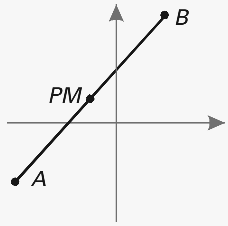
$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

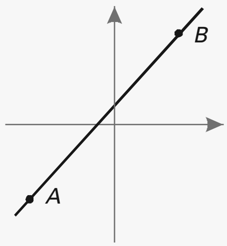
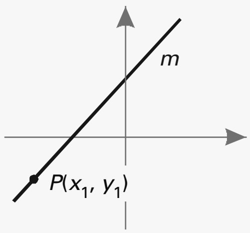
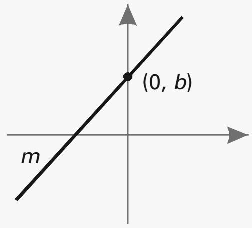
FÓRMULAS DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS	
$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$	$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$
$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y$	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$
$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$	$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

FÓRMULAS DE MEDIO ÁNGULO	
$\operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS	
$y=\operatorname{sen}x \quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{sen}^{-1}y$	$y=\cos x \quad\Rightarrow\quad x=\cos^{-1}y$
$y=\tan x \quad\Rightarrow\quad x=\tan^{-1}y$	$y=\operatorname{ctg}x \quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{ctg}^{-1}y$
$y=\sec x \quad\Rightarrow\quad x=\sec^{-1}y$	$y=\csc x \quad\Rightarrow\quad x=\csc^{-1}y$

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

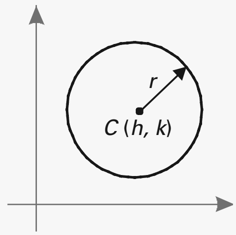
Distancia de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$	**División de un segmento AB en una razón r**	
	$r \neq 1$	Punto medio $r = 1$
$d = \lvert AB \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 	$x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$; y $y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$ 	$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ 

Pendiente de la recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$	**Ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m**	**Ecuación de la recta de pendiente m y ordenada en el origen b**
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 	$y - y_1 = m(x - x_1)$ 	$y = mx + b$ 

CÍRCULOS

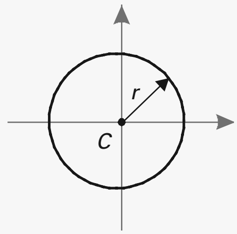
Ecuación del círculo con centro en (h, k) y radio r.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Ecuación del círculo con centro en el origen y radio r.

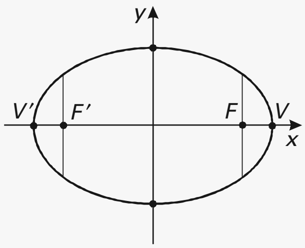
$$x^2 + y^2 = r^2$$



ELIPSES

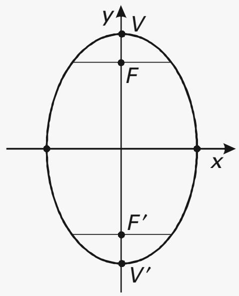
Ecuación de elipse con centro en el origen y eje focal, el eje x.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



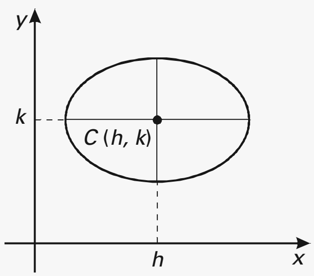
Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal, el eje y.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Ecuación de elipse con centro en $C(h, k)$ y eje focal, paralelo al eje x.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Ecuación de elipse con centro en $C(h, k)$ y eje focal, paralelo al eje y.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$